Тексовые задачи на растворы, смеси и сплавы — это в первую очередь задачи на проценты. Поэтому давайте вспомним для начала основные факты о процентах, которые нам пригодятся при решении задач подобного типа.

Проценты

- Один процент от числа a — это $\frac{1}{100}$ часть от числа a. Следовательно, $n\%$ от числа a — это $\frac{n}{100}\cdot a$.
- Чтобы узнать, сколько процентов составляет число a от числа b, нужно найти значение выражения $\frac{a}{b}\cdot 100\%$.
- Чтобы найти, на сколько процентов число a больше числа b (то есть в этом случае $a>b$), можно поступить одним из двух способов:
— найти $\frac{a}{b}\cdot 100\%$, то есть найти, сколько процентов составляет число a от числа b, а затем найти $\frac{a}{b}\cdot 100\%-100\%$, то есть найти, на сколько это число процентов больше ста процентов;
— найти $\frac{a-b}{b}\cdot 100\%$, то есть сразу найти нужную величину.
- Чтобы найти, на сколько процентов число a меньше числа b (то есть в этом случае $a<b$), можно поступить одним из двух способов:
— найти $\frac{a}{b}\cdot 100\%$, то есть найти, сколько процентов составляет число a от числа b, а затем найти $100\%-\frac{a}{b}\cdot 100\%$, то есть найти, на сколько это число процентов меньше ста процентов;
— найти $\frac{b-a}{b}\cdot 100\%$, то есть сразу найти нужную величину.

Составляющие задач на растворы, смеси и сплавы

Что происходит в задачах на растворы, смеси и сплавы? Поговорим на примере растворов. В задачах подобного типа происходит смешивание растворов одного и того же вещества (например, кислоты), в результате чего получается новый раствор того же самого вещества. Следовательно, в задаче даны три основные величины:

- смесь: масса или объем раствора или сплава, выраженный в граммах, килограммах, литрах и т.п. Например, это может быть раствор некоторой кислоты, сплав никеля. Сокращенно будем обозначать «M».
- вещество: масса или объем того вещества, которое является частью раствора или сплава, выраженный в граммах, килограммах, литрах и т.п. Например, это может быть кислота, входящая в состав раствора, никель, входящей в состав сплава. Сокращенно будем обозначать «m».
- концентрация вещества: это то число процентов, которое составляет вещество в смеси. Концентрация вещества находится в пределах от 0% до 100%. Сокращенно будем обозначать «K».

Тогда верна следующая формула:

$$\text{вещество}=\frac{\text{концентрация}}{100\%}\cdot\text{смесь}$$

Пример задачи с виноградом и изюмом

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

▶ Виноград и изюм в нашем случае являются смесями, которые состоят из двух частей: вода и мякоть, которая является в нашем случае веществом. При сушке винограда выпаривается вода, а вся мякоть, имеющаяся в нем, остается и переходит в мякоть, являющуюся частью изюма.

Следовательно, уравнение, которое нам необходимо составить, следующее: «масса мякоти в винограде равна массе мякоти в изюме».

Пусть x кг — масса винограда. Если в винограде 90% воды, то мякоти в нем $100\%-90\%=10\%$. Если в изюме 5% воды, то мякоти в нем $100\%-5\%=95\%$. По формуле

$$\text{вещество}=\frac{\text{концентрация}}{100\%}\cdot\text{смесь}$$

мякоти (в килограммах) в винограде

$$\frac{10}{100}\cdot x,$$

а мякоти (в килограммах) в изюме

$$\frac{95}{100}\cdot 20.$$

Получаем следующую таблицу:

	M	m	K
Виноград	x	$\frac{10}{100}\cdot x$	10
Изюм	20	$\frac{95}{100}\cdot 20$	95

Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{10}{100}\cdot x=\frac{95}{100}\cdot 20 \quad\Leftrightarrow\quad x=190.$$

Следовательно, потребуется 190 кг винограда. ■

Пример задачи с одним смешиванием и неизвестной концентрацией

Смешали 4 кг 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 кг 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

▶ Основные моменты, важные в этой задаче:

- после смешения двух растворов получается раствор, масса которого равна сумме масс смешиваемых растворов;
- сумма масс вещества в смешиваемых растворах равна массе вещества в получившемся растворе.

Составим таблицу, где $k\%$ — концентрация получившегося раствора:

	M	m	K
I	4	$\frac{15}{100}\cdot 4$	15
II	6	$\frac{25}{100}\cdot 6$	25
$I+II$	$4+6$	$\frac{15}{100}\cdot 4+\frac{25}{100}\cdot 6$	k

Воспользуемся формулой

$$\text{вещество}=\frac{\text{концентрация}}{100\%}\cdot\text{смесь}$$

для третьей строки таблицы:

$$\frac{15}{100}\cdot 4+\frac{25}{100}\cdot 6=\frac{k}{100}\cdot 10 \quad\Leftrightarrow\quad k=21.$$

Следовательно, в получившемся растворе 21% вещества. ■

Пример задачи с одним смешиванием и неизвестной массой

Имеются два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 20% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 15% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

▶ Основные моменты, важные в этой задаче:

- после смешения двух сплавов получается сплав, масса которого равна сумме масс смешиваемых сплавов;
- сумма масс никеля в смешиваемых сплавах равна массе никеля в получившемся сплаве.

Пусть x кг — масса 5-процентного (I) сплава. Тогда, так как после спаивания двух сплавов получился третий ($I+II$) сплав, масса которого равна 225 кг, то масса 20-процентного (II) сплава равна $(225-x)$ кг.

Воспользуемся формулой

$$\text{вещество} = \frac{\text{концентрация}}{100\%} \cdot \text{смесь}$$

для заполнения столбца «m» таблицы:

	M	m	K
I	x	$\frac{5}{100} \cdot x$	5
II	$225 - x$	$\frac{20}{100} \cdot (225 - x)$	20
$I + II$	225	$\frac{15}{100} \cdot 225$	15

Так как сумма масс никеля в I и II сплавах равна массе никеля в получившемся $I + II$ сплаве, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{5}{100} \cdot x + \frac{20}{100} \cdot (225 - x) = \frac{15}{100} \cdot 225 \quad \Leftrightarrow \quad x = 75.$$

Следовательно, масса 5-процентного сплава равна 75 кг, тогда масса 20-процентного сплава равна 225 кг $-$ 75 кг $=$ 150 кг.
Следовательно, масса первого сплава меньше массы второго сплава на 150 кг $-$ 75 кг $=$ 75 кг.

■

Пример задачи с двумя смешиваниями с неизвестной концентрацией

Имеется два сосуда: первый содержит 30 кг, второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

▶ Основные моменты, важные в этой задаче:

- после смешения двух растворов получается раствор, масса которого равна сумме масс смешиваемых растворов;
- сумма масс кислоты в смешиваемых растворах равна массе кислоты в получившемся растворе.

Пусть $k_1\%$ и $k_2\%$ — концентрации первого и второго растворов соответственно. Составим таблицу для первого смешивания:

	M	m	K
I'	30	$\frac{k_1}{100} \cdot 30$	k_1
II'	20	$\frac{k_2}{100} \cdot 20$	k_2
$I' + II'$	$30 + 20$	$\frac{68}{100} \cdot 50$	68

Так как сумма масс кислоты в I' и II' растворах равна массе кислоты в получившемся $I' + II'$ растворе, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{k_1}{100} \cdot 30 + \frac{k_2}{100} \cdot 20 = \frac{68}{100} \cdot 50 \quad \Leftrightarrow \quad k_1 \cdot 3 + k_2 \cdot 2 = 68 \cdot 5.$$

Пусть M кг — масса и первого, и второго растворов, которые смешали во второй раз. Составим таблицу для второго смешивания:

	M	m	K
I''	M	$\frac{k_1}{100} \cdot M$	k_1
II''	M	$\frac{k_2}{100} \cdot M$	k_2
$I'' + II''$	$M + M$	$\frac{70}{100} \cdot 2M$	70

Так как сумма масс кислоты в I'' и II'' растворах равна массе кислоты в получившемся $I'' + II''$ растворе, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{k_1}{100} \cdot M + \frac{k_2}{100} \cdot M = \frac{70}{100} \cdot 2M \quad \Leftrightarrow \quad k_1 + k_2 = 70 \cdot 2.$$

Составим систему из двух получившихся уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \cdot 3 + k_2 \cdot 2 = 68 \cdot 5 \\ k_1 + k_2 = 70 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 60 \\ k_2 = 80 \end{cases}$$

Следовательно, первый раствор содержит 60% кислоты, значит, масса кислоты в нем равна

$$m_1 = \frac{60}{100} \cdot 30 = 18 \text{ (кг)}.$$

■

Пример задачи с двумя смешиваниями, одно из которых с водой

Смешав 15-процентный и 95-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 20-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 30-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 15-процентного раствора использовали для получения смеси?

▶ Основные моменты, важные в этой задаче:

- после смешения двух растворов получается раствор, масса которого равна сумме масс смешиваемых растворов;
- сумма масс кислоты в смешиваемых растворах равна массе кислоты в получившемся растворе;
- вода — это 0-процентный раствор кислоты.

Пусть M_1 кг и M_2 кг — массы 15-процентного (I) и 95-процентного (II) растворов соответственно. Растворы массой 10 кг обозначим III' и III'' в зависимости от номера смешивания .
Составим таблицу для первого смешивания (с водой):

	M	m	K
I	M_1	$\frac{15}{100} \cdot M_1$	15
II	M_2	$\frac{95}{100} \cdot M_2$	95
III'	10	$\frac{0}{100} \cdot 10$	0
$I + II + III'$	$M_1 + M_2 + 10$	$\frac{20}{100} \cdot (M_1 + M_2 + 10)$	20

Так как сумма масс кислоты в I, II и III' растворах равна массе кислоты в получившемся $I + II + III'$ растворе, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{15}{100} \cdot M_1 + \frac{95}{100} \cdot M_2 + 0 = \frac{20}{100} \cdot (M_1 + M_2 + 10)$$

Составим таблицу для второго смешивания (с 50-процентным раствором):

	M	m	K
I	M_1	$\frac{15}{100} \cdot M_1$	15
II	M_2	$\frac{95}{100} \cdot M_2$	95
III''	10	$\frac{50}{100} \cdot 10$	50
$I + II + III''$	$M_1 + M_2 + 10$	$\frac{30}{100} \cdot (M_1 + M_2 + 10)$	30

Так как сумма масс кислоты в I, II и III'' растворах равна массе кислоты в получившемся $I + II + III''$ растворе, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{15}{100} \cdot M_1 + \frac{95}{100} \cdot M_2 + \frac{50}{100} \cdot 10 = \frac{30}{100} \cdot (M_1 + M_2 + 10)$$

Домножим оба уравнения на 100 и составим из них систему:

$$\begin{cases} 15M_1 + 95M_2 = 20(M_1 + M_2 + 10) \\ 15M_1 + 95M_2 + 500 = 30(M_1 + M_2 + 10) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 15M_1 + 95M_2 = 20(M_1 + M_2 + 10) \\ 500 = 10(M_1 + M_2 + 10) \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -5M_1 + 75M_2 = 200 \\ M_1 + M_2 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 = 35 \\ M_2 = 5 \end{cases}$$

$(*)$ Вычли из второго уравнения первое. Обратите внимание на это действие!
Следовательно, масса 15-процентного раствора равна 35 кг.