#математика

Планиметрия. Четырёхугольники

профиматика

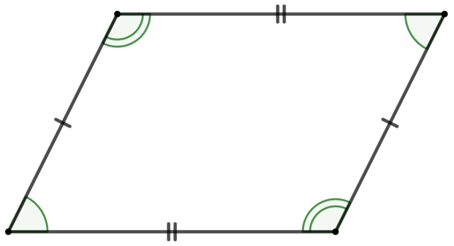
1 Параллелограмм

Определение. Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

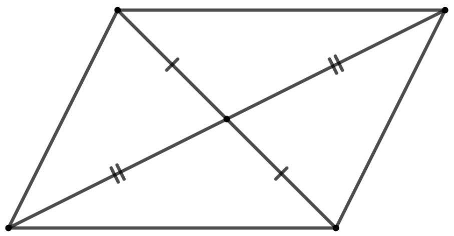
1. Свойства параллелограмма:

В параллелограмме противоположные стороны равны.

В параллелограмме противоположные углы равны.

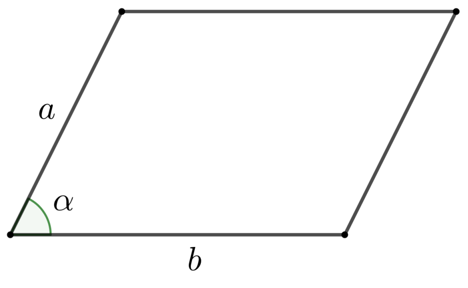


Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.



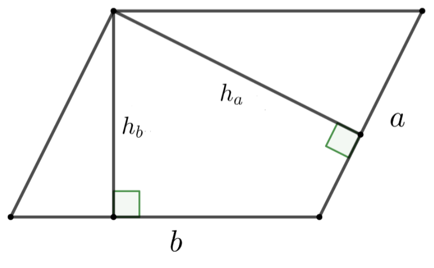
2. Площадь параллелограмма, если известны две стороны параллелограмма и угол между ними:

$$S = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

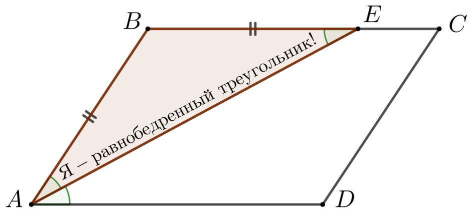


3. Площадь параллелограмма, если известна высота параллелограмма и основание, к которому эта высота проведена:

$$S = b \cdot h_b \text{ или } S = a \cdot h_a$$



4. Пусть AE – биссектриса, тогда $\triangle ABE$ - равнобедренный.



Доказательство:

1. $\angle BAE = \angle EAD$, так как AE биссектриса $\angle BAD$.

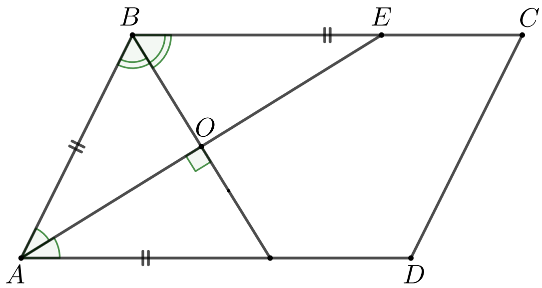
2. $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AE.

3. Тогда мы понимаем, что $\angle BAE = \angle BEA = \angle EAD$.

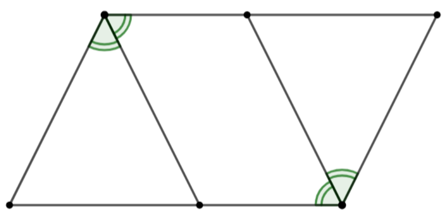
   А значит треугольник ABE – равнобедренный.

■

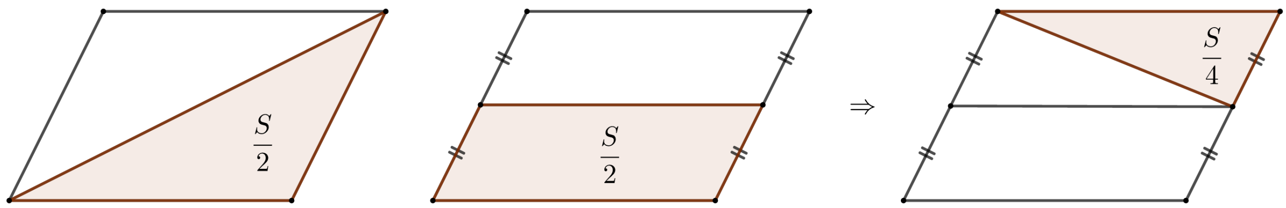
5. Угол между биссектрисами соседних углов параллелограмма прямой, или, по-другому говоря, биссектрисы соседних углов перпендикулярны.
Это следует из того, что если в $\triangle ABE$ провести биссектрису, то она станет высотой.



6. Биссектрисы противоположных углов параллельны.



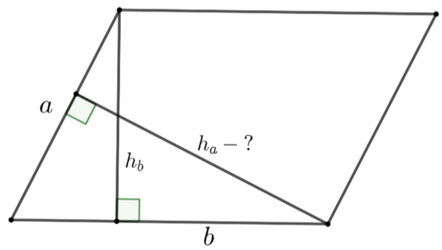
7. Немного о площадях частей параллелограмма



8. Как найти высоту параллелограмма, зная другую высоту и две стороны?

Заметим, что площадь параллелограмма, с одной стороны, равна $S = b \cdot h_b$, а с другой стороны $S = h_a \cdot a$,

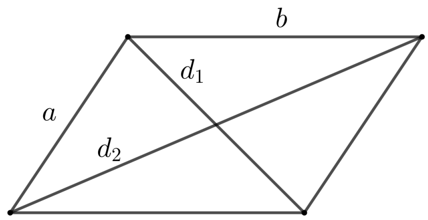
тогда $h_a = \dfrac{b \cdot h_b}{a}$.



9. Тождество параллелограмма:

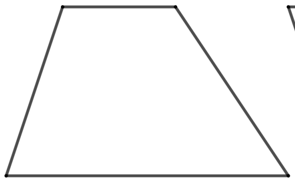
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

где a и b - стороны параллелограмма, d_1 и d_2 - диагонали.

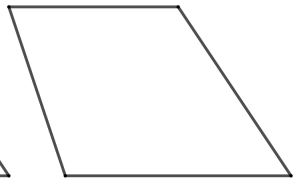


2 Трапеция

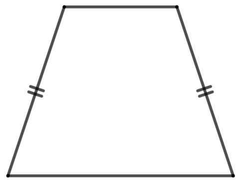
Определение. Трапеция – это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – нет.



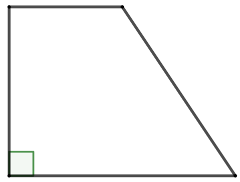
трапеция



произвольная



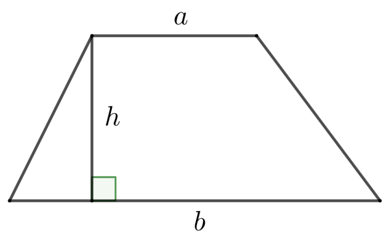
равнобедренная



прямоугольная

$S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h.$

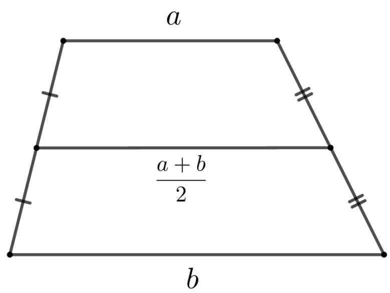
Заметим, что $\dfrac{a+b}{2}$ – это длина средней линии, поэтому площадь трапеции равна средней линии, умноженной на высоту.



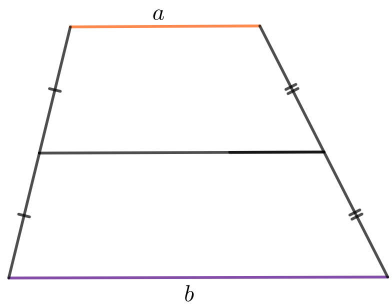
Определение. Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины двух боковых сторон трапеции.

Свойства средней линии трапеции

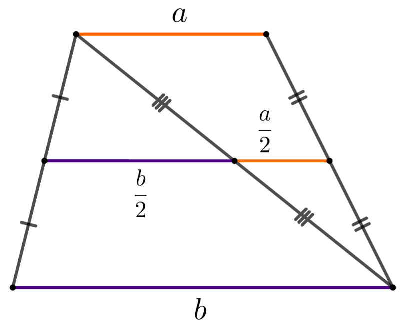
1. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



2. Средняя линия делит каждую диагональ трапеции пополам.



При этом отрезки, на которые средняя линия делится диагональю, равны половинам оснований.



3. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции равен, полуразности оснований.

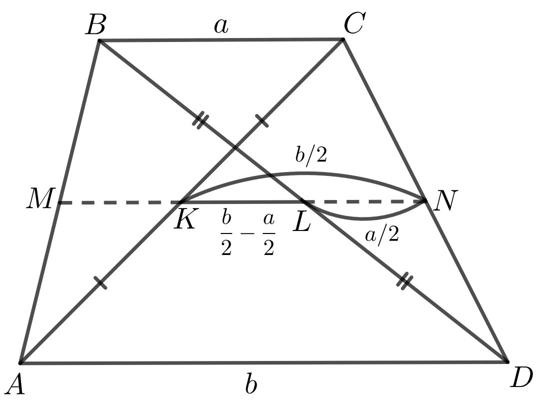
$$KL = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}$$

Доказательство:

По утверждению 1, точки K и L лежат на средней линии трапеции. Значит весь отрезок KL лежит на средней линии.
Так же по свойству 2 мы знаем, что KN лежит на средней линии трапеции.
Заметим, что ML и KN - средние линии $\triangle ABD$ и $\triangle DCA$ соответственно $\Rightarrow ML = KN = \frac{b}{2}$
MK и LN - средние линии $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$ соответственно $\Rightarrow MK = LN = \frac{a}{2}$

Значит,

$$KL = KN - LN = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}.$$



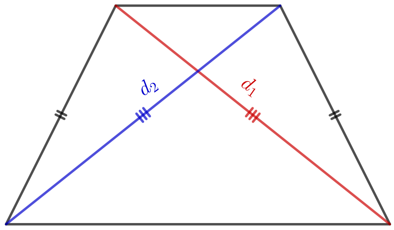
Факты про **равнобедренную** трапецию:

> **Определение.** Равнобедренной трапецией называется трапеция, у которой боковые стороны равны.

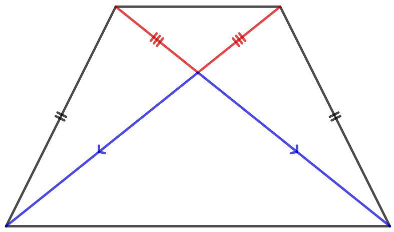
Свойства равнобедренной трапеции:

- Углы при основании равны;

· Диагонали равны;

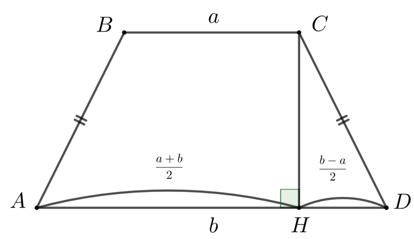


· Диагонали точкой пересечения делятся на равные отр

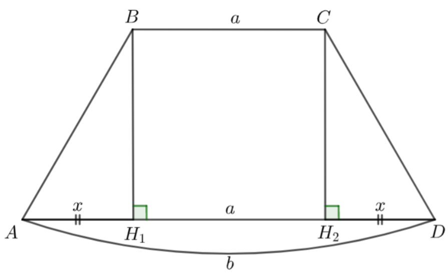


1. Очень ценное свойство **равнобедренной** трапеции:

Заметим, что отрезок AH по длине равен средней линии трапеции. Отрезок $AH = \dfrac{a+b}{2}$, а отрезок $HD = \dfrac{b-a}{2}$.

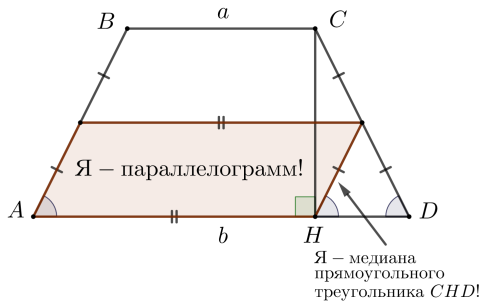


Приведём первое доказательство этого факта. Рассмотрим вторую картинку. Из неё следует следующее:



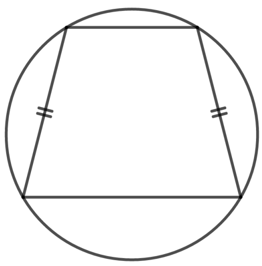
$$x + a + x = b$$
$$2x = b - a$$
$$x = \frac{b-a}{2}$$
$$AH_2 = x + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b-a+2a}{2} = \frac{b+a}{2}$$

Второе доказательство этого факта можно увидеть на третьей картинке.

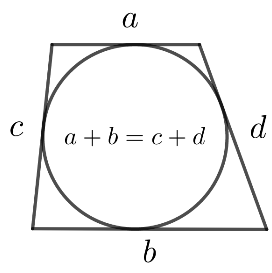


2. Вокруг равнобедренной трапеции всегда можно описать окружность.

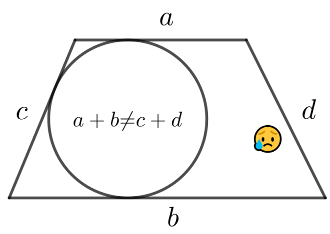
Верно и обратное: если вокруг трапеции можно описать окружность – она равнобедренная.



3. Вписать окружность можно в трапецию произвольной формы, главное, чтобы соблюдалось условие $a + b = c + d$,

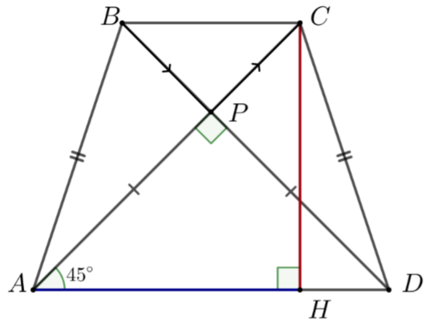


иначе нельзя вписать.



4. В равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями высота CH равна отрезку AH и равна средней линии трапеции MN.

$$\boxed{CH = AH = MN}$$



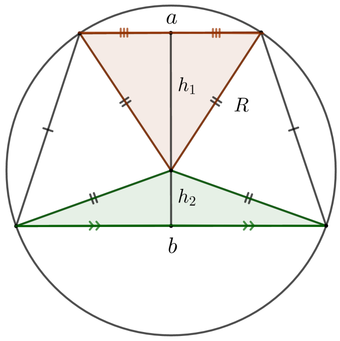
По свойству равнобедренной трапеции $\triangle APD$ – прямоугольный и равнобедренный. Это значит, что $\angle PAD = \angle PDA = 45°$

$\triangle ACH$– прямоугольный с $\angle CAH = 45°$,поэтому он равнобедренный. Тогда $CH = AH$.

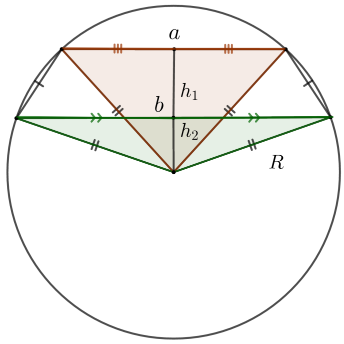
А ещё ранее доказывалось, что в равнобедренной трапеции отрезок AH равен по длине средней линии. Отсюда и получается наше утверждение.

5. Пусть известны длины оснований трапеции a и b, а также R – радиус описанной окружности. Как нам найти высоту?

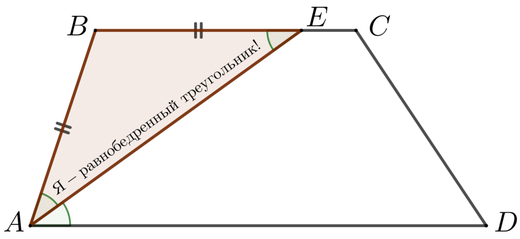
Ответ будет зависеть от положения центра окружности относительно трапеции. Если центр внутри, то высота трапеции равна $h = h_1 + h_2$, которые можно найти по теореме Пифагора из двух треугольников.



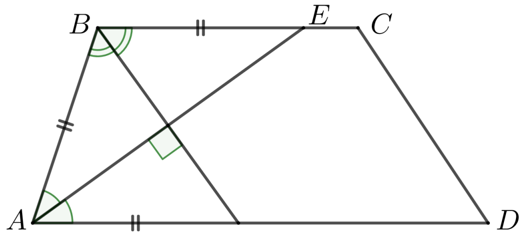
Если центр вне трапеции, то высота трапеции равна $h = h_1 - h_2$.



6. AE – биссектриса угла A трапеции. Пусть AE пересекает основание BC трапеции в точке E, тогда $\triangle ABE$ – равнобедренный.
Действительно, если AE – биссектриса, то $\angle BAE = \angle EAD$. Заметим, что $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD. Тогда в $\triangle ABE$ два угла равны, значит, он равнобедренный.

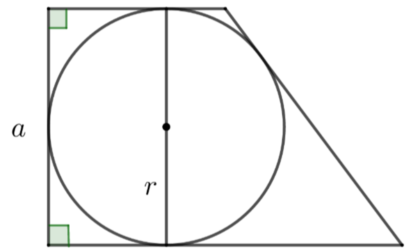


*Биссектрисы углов при боковой стороне трапеции перпендикулярны.



7. Если в прямоугольную трапецию можно вписать окружность, то радиус этой окружности равен половине стороны трапеции, перпендикулярной основанию.

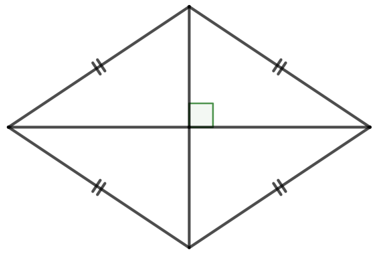
$$a = 2r$$
$$r = \frac{a}{2}$$



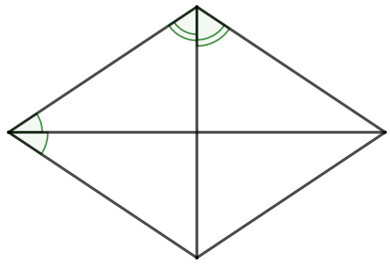
3 Ромб

Определение. Ромб – это четырехугольник, у которого все стороны равны.

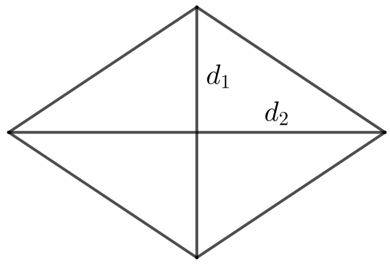
1. Диагонали ромба пересекаются под углом 90°.



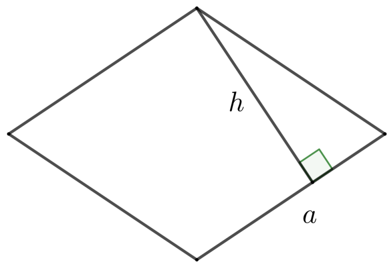
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.



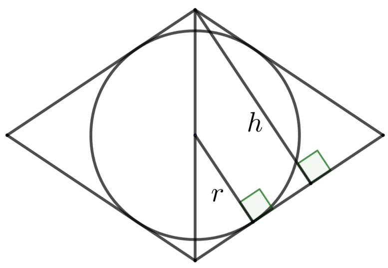
3. $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$.



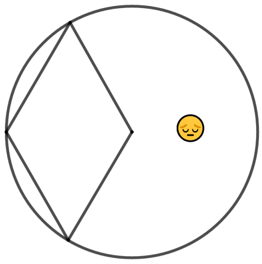
4. $S = a \cdot h$.



5. В ромб всегда можно вписать окружность, радиус которой будет равен $r = \dfrac{h}{2}$.

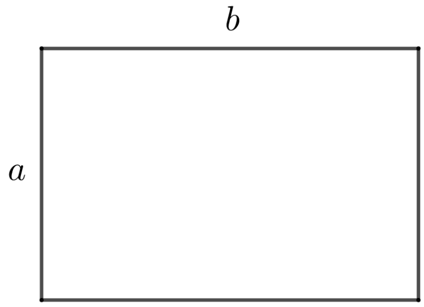


6. Если ромб не является квадратом, то описать вокруг него окружность нельзя.



4 Прямоугольник

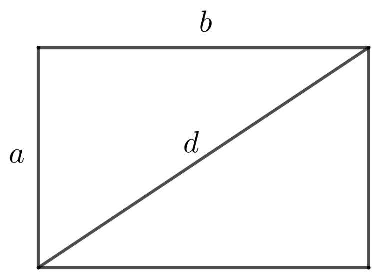
1. $S = a \cdot b$.



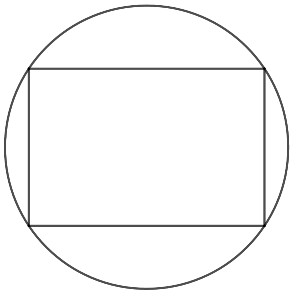
2. Диагонали прямоугольника равны. Их можно вычислить, зная стороны прямоугольника, по теореме Пифагора:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

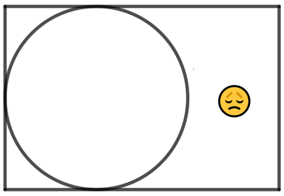
*На самом деле, любой параллелограмм, у которого диагонали равны, является прямоугольником.



3. Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.



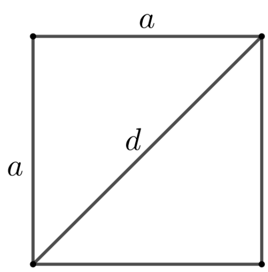
4. Если прямоугольник не является квадратом, то вписать в него окружность нельзя.



5 Квадрат

1. $S = a \cdot a = a^2$.
2. Диагональ квадрата можно найти по теореме Пифагора:

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2,\ d = a\sqrt{2}.$$

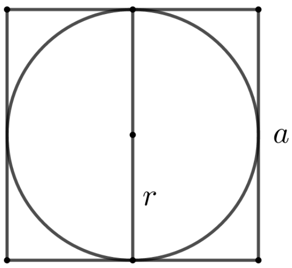


3. Площадь квадрата можно выразить через длину его диагонали:

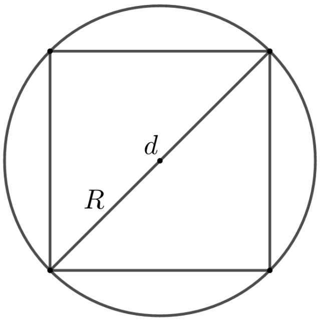
Так как $S = a^2$, а $d^2 = 2a^2$, значит $a^2 = \dfrac{d^2}{2}$, значит

$$S = \frac{d^2}{2}.$$

4. $r = \dfrac{a}{2}$.



5. $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

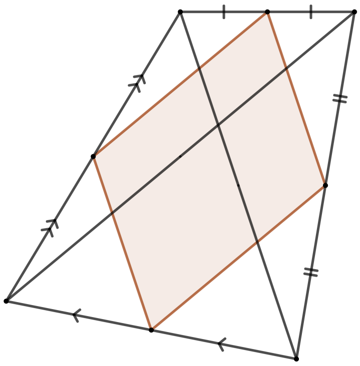


6 Четырехугольники

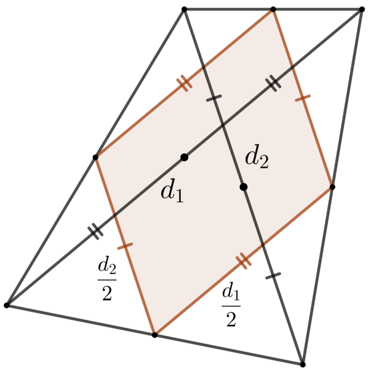
1. Теорема Вариньона

Четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон произвольного выпуклого четырехугольника, является параллелограммом.

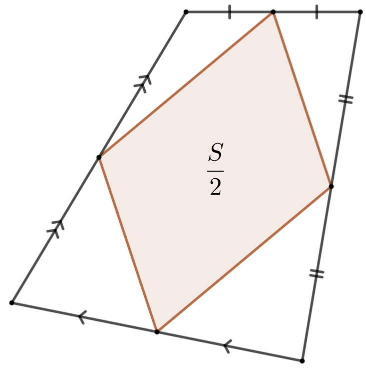
Действительно, стороны внутреннего четырехугольника параллельны диагоналям исходного четырехугольника, как средние линии соответствующих треугольников.



2. Стороны получившегося параллелограмма равны половинкам диагоналей исходного четырехугольника.



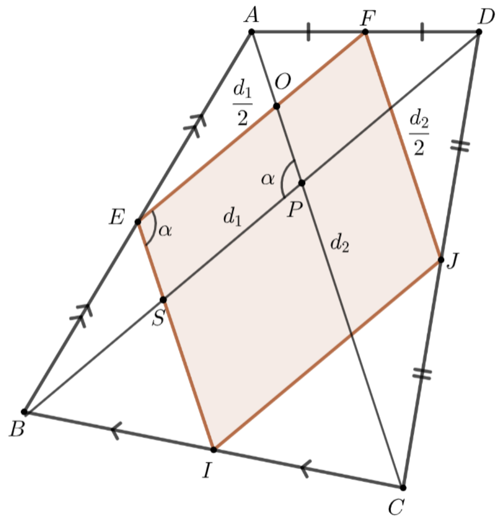
3. Площадь такого четырехугольника равна половине площади исходного четырехугольника.



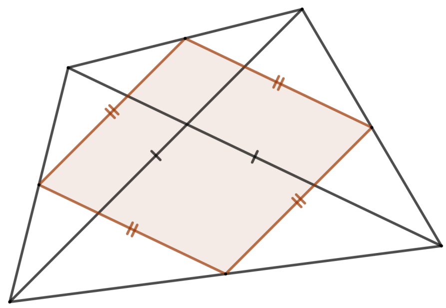
Доказательство:

1. Пусть $BD = d_1, AC = d_2, \angle APB = \alpha$.
2. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$.
3. $EF = \frac{d_1}{2}$, так как EF – средняя линия $\triangle BAD$.
4. $EI = \frac{d_2}{2}$, так как EI – средняя линя $\triangle ABC$.
5. $EOPS$ - параллелограмм $\Rightarrow$ $\angle OES = \angle OPS = \alpha$.
6. $FJ = \frac{d_2}{2}$, так как FJ – средняя линия $\triangle ADC$.
7. Тогда $S_{EFJI} = \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = \frac{S}{2}$.

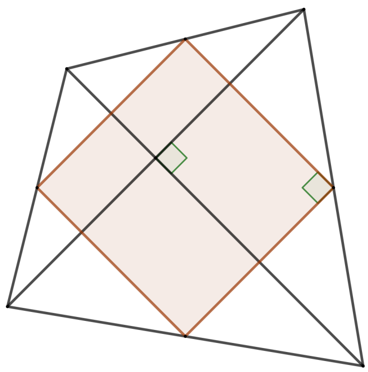
■



4. Если диагонали исходного четырехугольника равны, то параллелограмм Вариньона становится ромбом.

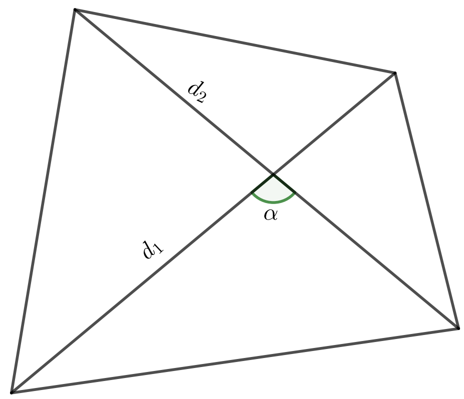


5. Если диагонали исходного четырехугольника перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона становится прямоугольником.



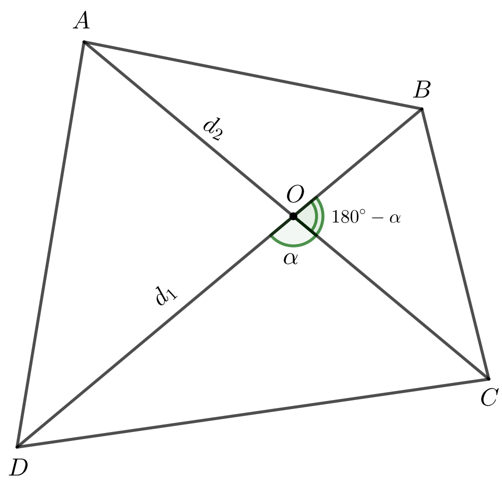
6. Площадь любого выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$$



Доказательство:

Распишем площадь каждого из треугольников:



$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin \angle BOC$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \angle COD$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD$$

По формуле приведения $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

Тогда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha \qquad S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \cdot \sin\alpha$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin\alpha \qquad S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin\alpha$$

Таким образом:

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BDO} + S_{DOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}BO \cdot OD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}CO \cdot OD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin\alpha =$

Вынесем общий множитель за скобку:

$= \frac{1}{2}\sin\alpha(AO \cdot OB + BO \cdot OD + CO \cdot OD + AO \cdot OC) =$

Сгруппируем:

$= \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot ((AO \cdot OB + BO \cdot OD) + (CO \cdot OD + AO \cdot OC)) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (OB \cdot (AO + OD) + CO \cdot (OD + AO)) = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (OB + CO)(OD + AO) = \frac{1}{a}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha$

■