Подготовка к заданию 11 профильного ЕГЭ

Задания 11 профильного ЕГЭ по математике представляют собой текстовые задачи. В таких задачах нужно проинтерпретировать описанную в условии ситуацию, составить математическую модель и найти искомую величину. Как правило, решение задачи сводится к решению линейного или квадратного уравнения, или систем таких уравнений, однако некоторые из задач можно решить чисто арифметическими методами.

Сюжеты задач стандартны, но довольно разнообразны. В этом уроке мы разберём основные типы сюжетов, возникающих на экзамене, и постараемся охватить как можно больше типов появляющихся уравнений и систем.

Задачи на движение

Одним из самых распространённых типов текстовых задач являются задачи на движение. Во всех таких задачах допускается определённая идеализация: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости (в том числе скорость течения) постоянны в течение определённых промежутков времени, движущиеся тела считаются материальными точками, то есть размеры этих тел несущественны для решения задачи.

Напомним основные формулы, использующиеся при решении задач на движение.

- Если расстояние между двумя движущимися навстречу друг другу телами равно s, а их скорости равны v_1 и v_2, то время t, через которое они встретятся, находится по формуле
$$t = \frac{s}{v_1 + v_2}.$$
- Если расстояние между двумя телами равно s и они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$) так, что первое тело следует за вторым, то время t, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле
$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}.$$

Начнём с примера, который можно решить, не составляя уравнения.

Пример 1. Расстояние между городами A и B равно 435 км. Из города A в город B со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

Решение.

Через час после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно

$$435 - 60 = 375 \text{ (км)},$$

поэтому автомобили встретятся через время

$$t = \frac{375}{60 + 65} = 3 \text{ (ч)}.$$

Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 4 часа и проедет $60 \cdot 4 = 240$ (км).

Ответ: 240.

Одним из наиболее распространённых типов задач на движение являются задачи на движение по воде. В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости движущегося тела, при движении против течения — вычитается из скорости тела.

Пример 2. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

Решение.

Пусть искомая величина равна $2x$. Составим по условию задачи уравнение:

$$\frac{x}{28} + \frac{x}{22} + 5 = 30,$$

откуда

$$\frac{x}{28} + \frac{x}{22} = 25, \quad \frac{11x + 14x}{28 \cdot 11} = 25, \quad \frac{25x}{308} = 25, \quad x = 308.$$

Значит, искомое расстояние равно 616 км.

Ответ: 616.

Часто в задачах на движение возникает *средняя скорость*. Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле

$$v = \frac{s}{t},$$

где s — путь, пройденный телом, а t — время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения. Например, если путь состоял из двух участков протяжённостью s_1 и s_2, скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2, то

$$s = s_1 + s_2, \quad t = t_1 + t_2,$$

где

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1}, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, вторую треть — со скоростью 16 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 24 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Решение.

Обозначим длину всей трассы через $3s$. Тогда первую треть трассы велосипедист проехал за время $t_1 = \dfrac{s}{12}$, вторую треть — за время $t_2 = \dfrac{s}{16}$, последнюю треть — за время $t_3 = \dfrac{s}{24}$. Значит, время, потраченное им на весь путь, равно

$$t_1 + t_2 + t_3,$$

то есть

$$\frac{s}{12} + \frac{s}{16} + \frac{s}{24} = \frac{9s}{48} = \frac{3s}{16}.$$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле

$$v = 3s : \frac{3s}{16} = 3s \cdot \frac{16}{3s} = 16 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 16.

Задачи на совместную работу

В определённом смысле задачи на работу схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния — объём работы. В тех случаях, когда объём работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице. Существенно разных задач здесь практически нет, во всех случаях речь идёт о выполнении определённой работы, меняются только сюжеты, а «математическая» фабула остаётся одной и той же.

Ключевой в задачах на совместную работу является следующая задача: первый мастер может выполнить некоторую работу за a часов, а второй мастер — за b часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоём?

Поскольку объём работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную $\dfrac{1}{a}$, второй — $\dfrac{1}{b}$, а оба мастера — часть работы, равную $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Значит, всю работу они выполнят за время

$$t = \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}.$$

Пример 4. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение.

За 3 часа первый рабочий сделал $\frac{3}{15}$ всей работы. Оставшиеся $\frac{12}{15}$ работы рабочие делали уже вместе и потратили на это

$$\frac{12}{15} : \frac{2}{15} = 6 \text{ (ч)}.$$

Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 9 часов.

Ответ: 9.

Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на работу. Модельная ситуация остаётся той же, только мастерам будут соответствовать трубы или насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении или опустошении бассейна или иного резервуара.

Пример 5. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 360 литров она заполняет на 10 минут медленнее, чем вторая труба?

Решение.

Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x > 0$. Тогда вторая труба пропускает $x + 6$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение:

$$\frac{360}{x} - \frac{360}{x+6} = 10,$$

откуда, разделив обе части уравнения на 10, получим

$$\frac{36}{x} - \frac{36}{x+6} = 1.$$

Приведём дроби в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{36(x+6) - 36x}{x(x+6)} = 1,$$

откуда

$$x(x+6) = 36 \cdot 6 \quad \text{и} \quad x^2 + 6x - 216 = 0.$$

Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -18 и 12, из которых только последнее удовлетворяет условию $x > 0$.

Ответ: 12.

Иногда в задачах на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям. Рассмотрим такой пример.

Пример 6. Маша и Саша за день могут прополоть 3 грядки, Саша и Паша — 4 грядки, а Паша и Маша — 5 грядок. Сколько грядок за день смогут прополоть дети, работая втроём?

Решение.

Вообразим, что сначала Маша и Саша работали один день, затем Саша и Паша работали один день, а потом Паша и Маша работали ещё один день. Получается, что каждый из детей работал два дня или что бригада, состоящая из Маши, Паши и Саши, прополола $3+4+5=12$ грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополет вдвое меньше грядок, то есть 6.

Ответ: 6.

Задачи на проценты

Для решения подавляющего большинства задач на проценты достаточно понимать, что процент — это просто одна сотая часть числа. Поэтому если товар стоил a рублей, а потом его цена выросла, например, на 3, 15 или 27 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a увеличить соответственно на 3, 15 или 27 сотых. Получим $1{,}03a$, $1{,}15a$, $1{,}27a$ соответственно. Если же цена уменьшилась на 3, 15 или 27 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a уменьшить соответственно на 3, 15 или 27 сотых. Получим $0{,}97a$, $0{,}85a$, $0{,}73a$ соответственно.

Попробуем ответить на следующий вопрос: a дороже b на 25%, на сколько процентов b дешевле a? Кажется, ответ очевиден: на 25%. Но это не так. В самом деле, $a=1{,}25b=\dfrac{5}{4}b$, значит, $b=\dfrac{4}{5}a=0{,}8a$. Тогда b меньше a на две десятых a, то есть на двадцать сотых a, значит, b дешевле a на 20%.

Отметим ещё следующее. Увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Интересно, что в любом случае мы получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив a на 10%, получим $1{,}1a$. Уменьшив полученную величину на 10%, получим $1{,}1a\cdot 0{,}9=0{,}99a$ — эта величина меньше начальной на 1%. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить a на 10%, а затем результат увеличить на 10%, получим те же самые $0{,}9a\cdot 1{,}1=0{,}99a$. Для начала рассмотрим следующий пример.

Пример 7. Пять рубашек дешевле куртки на 25%. На сколько процентов семь рубашек дороже куртки?

Решение.

Обозначим через P стоимость одной рубашки, через K — стоимость куртки. Из условия задачи следует, что $5P=0{,}75K$, откуда $P=\dfrac{0{,}75K}{5}=0{,}15K$. Следовательно, $7P=0{,}15K\cdot 7=1{,}05K$. Значит, стоимость семи рубашек больше стоимости куртки на 5 сотых, то есть семь рубашек дороже куртки на 5%.

Ответ: 5.

Одним из основных типов задач на проценты, возникающих на экзамене, являются задачи на концентрации (то есть на процентное содержание

какого-то вещества в его растворе, сплаве или смеси). В таких задачах считается, что массы смешиваемых веществ остаются неизменными. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем иногда опускать).

Пример 8. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 30 кг её 80-процентного и 20 кг её 60-процентного растворов.

Решение.

Используем ключевую идею, заключающуюся в отслеживании того, что происходит с чистой кислотой.

Во взятых растворах было $30 \cdot 0{,}8 = 24$ кг кислоты и $20 \cdot 0{,}6 = 12$ кг кислоты. Значит, в получившемся растворе было $24 + 12 = 36$ кг кислоты. При этом масса этого раствора равна $30 + 20 = 50$ (кг). Таким образом, концентрация кислоты в получившемся растворе составляет $\dfrac{36}{50} = 0{,}72$, то есть 72%.

Ответ: 72%.

Решим теперь в общем виде ключевую задачу нахождения концентрации раствора, полученного в результате смешивания двух растворов одного и того же вещества, причём эти растворы имеют разные массы и разную концентрацию.

Пример 9. Смешали a кг n-процентного водного раствора некоторого вещества с b кг m-процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси.

Решение.

Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом.

В первом растворе его было $\dfrac{a}{100} \cdot n = \dfrac{an}{100}$ кг, во втором растворе — $\dfrac{b}{100} \cdot m = \dfrac{bm}{100}$ кг. Значит, масса чистого вещества в полученной смеси будет равна $\dfrac{an}{100} + \dfrac{bm}{100}$ кг, а всего этой смеси получится $a + b$ кг:

Теперь найти искомую концентрацию k не представляет труда:

$$k = \frac{\frac{an}{100} + \frac{bm}{100}}{a+b} \cdot 100\% = \frac{an+bm}{a+b}\%.$$

Ответ: $\dfrac{an+bm}{a+b}\%$.

Заметим, что растворы в предыдущем примере можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь названия веществ.

Пример 10. Первый сплав содержит 70 % меди, второй — 40% меди. Из этих двух сплавов и 30 кг третьего сплава, не содержащего меди, получили сплав, в котором меди оказалось 37%. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 30-килограммовый сплав, содержащий 20% меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 43%. Найдите массу первого сплава.

Решение.

В этой задаче неизвестны массы первого и второго сплавов, но даны два варианта получения третьего сплава. Поэтому массы первого и второго сплавов (в килограммах) обозначим соответственно через x и y. Тогда для первого случая получаем:

$$0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}37(x + y + 30).$$

Для второго случая получаем:

$$0{,}7x + 0{,}4y + 0{,}2 \cdot 30 = 0{,}43(x + y + 30).$$

Таким образом, для определения неизвестных x и y нужно решить систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}7x + 0{,}4y = 0{,}37(x + y + 30), \\ 0{,}7x + 0{,}4y + 6 = 0{,}43(x + y + 30). \end{cases}$$

Чтобы избежать возможных и довольно распространённых ошибок в действиях с дробями, умножим обе части каждого уравнения на 100. Получим

$$\begin{cases} 70x + 40y = 37(x + y + 30), \\ 70x + 40y + 600 = 43(x + y + 30). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приходим к следующей системе:

$$\begin{cases} 33x + 3y = 1110, \\ 27x - 3y = 690. \end{cases}$$

Разделив обе части каждого уравнения на число 3, получим

$$\begin{cases} 11x + y = 370, \\ 9x - y = 230. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение y в данном примере находить необязательно. Сложим уравнения почленно: $20x = 600$, откуда $x = 30$.

Ответ: 30.