Подготовка к заданию 13 профильного ЕГЭ. Урок 1

В задании 13 из второй части профильного ЕГЭ по математике требуется решить уравнение и найти его корни, принадлежащие заданному отрезку. Как правило, нужно решить тригонометрическое уравнение, хотя иногда встречаются показательные и логарифмические уравнения, а также уравнения, в которых скомбинированы различные типы функций.

В этом уроке мы повторим основные методы решения тригонометрических уравнений и вспомним основные формулы и факты, которые надо знать для успешного решения таких уравнений.

Начнём с решения простейших тригонометрических уравнений. Будем называть *простейшими тригонометрическими уравнениями* уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ (также простейшим тригонометрическим уравнением является уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$, но котангенс довольно редко встречается в экзаменационных задачах), где a — это некоторое число.

Тригонометрические функции обладают свойством *периодичности*: одно и то же значение функция достигает бесконечное число раз, причём это повторение устроено определённым образом:

$$\sin x = \sin\,(x + 2\pi)\ ; \qquad \cos x = \cos\,(x + 2\pi)\ ; \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\,(x + \pi)\ .$$

Поэтому решениями тригонометрических уравнений являются не отдельные числа, а серии чисел, повторяющихся с определённым периодом.

Другим важным свойством тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ является *ограниченность*. При любых значениях x значения $\sin x$ и $\cos x$ заключены между -1 и 1.

Таким образом, простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = a$ не имеет решений при $|a| > 1$, при $a = 1$ его решениями является серия $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a = -1$ его решениями является серия $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а в случае, когда $|a| < 1$, получается две серии решений $x = \arcsin a + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ и $x = \pi - \arcsin a + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Простейшее тригонометрическое уравнение $\cos x = a$ не имеет решений при $|a| > 1$, при $a = 1$ его решениями является серия $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при $a = -1$ его решениями является серия $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а в случае, когда $|a| < 1$, получается две серии решений $x = \arccos a + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ и $x = -\arccos a + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Решением простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = a$ является серия $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

Заметим, что $\pi \approx 3{,}1415\ldots > 3$. Следовательно, $\dfrac{\pi}{3} > 1$. Значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Впрочем, для решения большинства тригонометрических уравнений, возникающих в экзамене, не надо пользоваться обратными тригонометрическими функциями, а достаточно знать значения тригонометрических функций.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не определён	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Для того, чтобы находить значения тригонометрических функций при отрицательных значениях аргумента, можно воспользоваться *чётностью* косинуса и *нечётностью* синуса и тангенса:

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.
а) Решите уравнение $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x - 3 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
Решение.
а) Разложим левую часть уравнения на множители. Если не получается это сделать сразу, можно сделать замену $t = \cos x$ и решить квадратное уравнение. Получаем уравнение

$$\left(\cos x + \sqrt{3}\right)\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой произведение двух множителей, поэтому левая часть обращается в 0 тогда и только тогда, когда обращается в 0 один из множителей. Получаем $\cos x + \sqrt{3} = 0$ или $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

При $\cos x + \sqrt{3} = 0$ получаем $\cos x = -\sqrt{3}$, что невозможно, поскольку $\left|-\sqrt{3}\right| > 1$.

При $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ получаем $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью, можно отобрать корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Получим число $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\quad$ б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Часто данное в условии уравнение невозможно сразу же разложить на множители, а нужно предварительно преобразовать. Для этого необходимо помнить формулы приведения:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x;\qquad \sin(x+\pi)=-\sin x;\qquad \sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos x;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x;\qquad \sin(\pi-x)=\sin x;\qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x;$$
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x;\qquad \cos(x+\pi)=-\cos x;\qquad \cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x;$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x;\qquad \cos(\pi-x)=-\cos x;\qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x.$$

Перед применением формулы приведения бывает полезно проверить, правильно ли вы её вспомнили. Для этого можно подставить в левую и правую часть формулы несколько значений x, при которых удобно находить значение функции, например $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$, и проверить, что при этих значениях x значения выражений в левой и правой частях формулы совпадают.

Пример 3.

а) Решите уравнение $2\cos^2\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+\sin(\pi-x)-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулами приведения $\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=\sin x$ и $\sin(\pi-x)=\sin x$, запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin^2 x+\sin x-1=0;$$

$$(\sin x+1)(2\sin x-1)=0.$$

Значит, $\sin x=-1$, откуда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью, можно отобрать корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Иногда для того, чтобы разложить уравнение на множители, нужно предварительно воспользоваться основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

формулой косинуса двойного угла

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

или формулой синуса двойного угла

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

Пример 4.

а) Решите уравнение $\cos 2x - 2\sin x - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулой косинуса двойного угла $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, запишем исходное уравнение в виде:

$$-2\sin^2 x - 2\sin x = 0;$$

$$-2\sin x \cdot (\sin x + 1) = 0.$$

Значит, $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью, можно отобрать корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; 2π; 3π.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; πn, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; 2π; 3π.

Пример 5.

а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin^2 x + \sin 2x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Воспользовавшись формулой синуса двойного угла $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0;$$

$$\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x\right)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0.$$

Значит, $\sqrt{3}\sin x = \cos x$, откуда $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\sqrt{3}\cos x$, откуда $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью, можно отобрать корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $\quad -\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $\quad$ б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{4\pi}{3}$.