

## Подготовка к заданию 13 профильного ЕГЭ. Урок 2

В этом уроке мы продолжаем готовиться к заданию 13 профильного ЕГЭ по математике.

Мы разберём решения некоторых показательных и логарифмических уравнений, а также тригонометрических уравнений, в которых возникают показательные функции и логарифмы.

Начнём с несложного показательного уравнения.

### Пример 1.

а) Решите уравнение  $27^x - 2 \cdot 9^x - 3^x + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[0,5; 2]$ .

#### Решение.

а) Пусть  $t = 3^x$ , тогда исходное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned}t^3 - 2t^2 - t + 2 &= 0; \\(t^2 - 1)(t - 2) &= 0; \\(t + 1)(t - 1)(t - 2) &= 0,\end{aligned}$$

откуда  $t = -1$ ,  $t = 1$  или  $t = 2$ .

При  $t = -1$  получаем  $3^x = -1$ . Это уравнение не имеет решений, поскольку  $3^x > 0$  при любых значениях  $x$ .

При  $t = 1$  получаем  $3^x = 1$ , откуда  $x = 0$ .

При  $t = 2$  получаем  $3^x = 2$ , откуда  $x = \log_3 2$ .

б) Корень  $x = 0$  не принадлежит отрезку  $[0,5; 2]$ . Заметим, что  $\log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = 0,5$ . Кроме того,  $\log_3 2 < \log_3 9 = 2$ . Следовательно, корень  $x = \log_3 2$  принадлежит отрезку  $[0,5; 2]$ .

**Ответ:** а)  $0; \log_3 2$ ; б)  $\log_3 2$ .

Теперь рассмотрим пример, в котором сочетаются и возведение в степень, и тригонометрия.

### Пример 2.

а) Решите уравнение  $27 \cdot 81^{\sin x} - 12 \cdot 9^{\sin x} + 1 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

#### Решение.

а) Пусть  $t = 9^{\sin x}$ , тогда исходное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned}27t^2 - 12t + 1 &= 0; \\(9t - 1)(3t - 1) &= 0,\end{aligned}$$

откуда  $t = \frac{1}{9}$  или  $t = \frac{1}{3}$ .

При  $t = \frac{1}{9}$  получаем  $9^{\sin x} = 9^{-1}$ , откуда  $\sin x = -1$ ;  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

При  $t = \frac{1}{3}$  получаем  $9^{\sin x} = 9^{-\frac{1}{2}}$ , откуда  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ;  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  
или  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью можно отобразить корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ . Получим числа:  $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}$ .

**Ответ:** а)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

б)  $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}$ .

Перейдём к решению логарифмических уравнений.

**Пример 3.**

а) Решите уравнение  $\log_2^2 x + \log_2 x^{-7} + 12 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\sqrt{10}; 5\sqrt{10}]$ .

**Решение.**

а) Пусть  $t = \log_2 x$ , тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2 - 7t + 12 = 0;$$

$$(t - 3)(t - 4) = 0,$$

откуда  $t = 3$  или  $t = 4$ .

При  $t = 3$  получаем  $\log_2 x = 3$ , откуда  $x = 8$ .

При  $t = 4$  получаем  $\log_2 x = 4$ , откуда  $x = 16$ .

б) Заметим, что  $2\sqrt{10} = \sqrt{40} < \sqrt{49} = 7$ . Следовательно,  $8 > 2\sqrt{10}$ ,  $16 > 2\sqrt{10}$ .

Поскольку  $5\sqrt{10} = \sqrt{250}$ , получаем  $15 = \sqrt{225} < 5\sqrt{10} < \sqrt{256} = 16$ . Следовательно,  $8 < 5\sqrt{10}$ ,  $16 > 5\sqrt{10}$ .

Таким образом, отрезку  $[2\sqrt{10}; 5\sqrt{10}]$  принадлежит только корень  $x = 8$ .

**Ответ:** а) 8; 16; б) 8.

Наконец, рассмотрим пример, где тригонометрия сочетается с логарифмами.

**Пример 4.**

а) Решите уравнение  $2 \log_3^2 (2 \cos x) - 5 \log_3 (2 \cos x) + 2 = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**Решение.**

а) Пусть  $t = \log_3 (2 \cos x)$ , тогда исходное уравнение принимает вид:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$(2t - 1)(t - 2) = 0,$$

откуда  $t = \frac{1}{2}$  или  $t = 2$ .

При  $t = \frac{1}{2}$  получаем  $\log_3 (2 \cos x) = \frac{1}{2}$ , откуда  $2 \cos x = \sqrt{3}$ ;  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
 $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ , или  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

При  $t = 2$  получаем  $\log_3 (2 \cos x) = 2$ , откуда  $2 \cos x = 9$ ;  $\cos x = 4,5$ .  
Полученное уравнение не имеет решений, поскольку  $\cos x < 4,5$  при любых значениях  $x$ .

б) Воспользовавшись, например, числовой окружностью можно отобразить корни, принадлежащие отрезку  $\left[ \pi; \frac{5\pi}{2} \right]$ . Получим числа:  $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$ .

**Ответ:** а)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$   $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$  б)  $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$ .