Подготовка к заданию 15 профильного ЕГЭ. Урок 1

В задании 15 профильного ЕГЭ по математике требуется решить неравенство. Как правило, это показательное или логарифмическое неравенство, однако иногда встречаются и другие типы неравенств.

В этом уроке мы будем заниматься решением показательных неравенств.

Показательными неравенствами называются неравенства, одна или обе части которых содержат показательные выражения, то есть выражения, содержащие переменную в показателе степени. Общие методы решения показательных неравенств не отличаются от общих методов решения других неравенств: это равносильные преобразования, метод введения новой переменной, метод интервалов и др. Разумеется, при решении показательных неравенств надо пользоваться свойствами степени с действительным показателем.

Как правило, решение показательных неравенств сводится к решению простейших показательных неравенств, то есть неравенств вида $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$, где вместо $\geqslant$ может стоять любой из знаков $\leqslant$, $>$ или $<$, а какая-то из функций $f(x)$ или $g(x)$ может быть постоянной. Пользуясь тем, что функция a^t возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$, получаем, что показательное неравенство $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) \geqslant g(x)$ при $a>1$ и равносильно неравенству $f(x) \leqslant g(x)$ при $0<a<1$, то есть знак неравенства сохраняется при $a>1$ и заменяется противоположным при $0<a<1$. Аналогично решаются простейшие показательные неравенства с другими знаками: $\leqslant$, $>$ или $<$.

Разберём следующий пример.

Пример 1. Решите неравенство $3^{x+1}+10^x>10^{x-1}+4\cdot 3^x+3^{x+2}$.
Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$3^{x+1}+10^x-10^{x-1}-4\cdot 3^x-3^{x+2}>0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части получившегося неравенства:

$$\left(3^{x+1}-4\cdot 3^x-3^{x+2}\right)+\left(10^x-10^{x-1}\right)>0.$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$3^x\cdot\left(3-4-3^2\right)+10^{x-1}(10-1)>0,$$

откуда $-10\cdot 3^x+10^{x-1}\cdot 9>0$. Следовательно,

$$10^{x-1}\cdot 9>10\cdot 3^x; \qquad \frac{10^{x-1}}{10}>\frac{3^x}{9}; \qquad 10^{x-2}>3^{x-2}.$$

Выражение 3^{x-2} принимает положительные значения при любом значении x, поэтому на него можно разделить:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^{x-2}>1; \qquad x-2>0; \qquad x>2.$$

Ответ: $(2;+\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $0{,}04^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 10^{x^2} + 0{,}08^x$.
Решение.
Используя свойства степеней, перепишем неравенство в виде

$$0{,}04^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 5^{x^2} \cdot 2^{x^2} + 0{,}04^x \cdot 2^x.$$

Перенесём слагаемые из правой части неравенства в его левую часть и выполним группировку:

$$\left(0{,}04^x \cdot 2^{x^2} - 0{,}04^x \cdot 2^x\right) + \left(5^{x^2} \cdot 2^x - 5^{x^2} \cdot 2^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Вынесем за скобки общие множители:

$$0{,}04^x \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) + 5^{x^2} \cdot \left(2^x - 2^{x^2}\right) \leqslant 0,$$

откуда

$$0{,}04^x \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) - 5^{x^2} \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) \leqslant 0.$$

Ещё раз вынесем за скобки общий множитель:

$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left(0{,}04^x - 5^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Приведя уменьшаемое во вторых скобках к основанию 5, получим

$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left(5^{-2x} - 5^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Значение выражения $2^{x^2} - 2^x$ положительно при $x > 1$ и $x < 0$, равно нулю при $x = 1$ и $x = 0$ и отрицательно при $0 < x < 1$. Значение выражения $5^{-2x} - 5^{x^2}$ положительно при $-2 < x < 0$, равно нулю при $x = -2$ и $x = 0$ и отрицательно при $x < -2$ и $x > 0$. Таким образом, решение получившегося неравенства $x \leqslant -2$; $x = 0$; $x \geqslant 1$.

Ответ: $(-\infty; -2]$; 0; $[1; +\infty)$.

Часто для упрощения решения неравенства удобно воспользоваться заменой переменной.

Пример 3. Решите неравенство $3 \cdot 9^{x^2-1} - 12 \cdot 3^{x^2-2} + 1 \geqslant 0$.
Решение.
Запишем исходное неравенство в виде

$$3 \cdot 9^{x^2-1} - 4 \cdot 3^{x^2-1} + 1 \geqslant 0.$$

Пусть $t = 3^{x^2-1}$, тогда неравенство примет вид

$$3t^2 - 4t + 1 \geqslant 0; \qquad (3t-1)(t-1) \geqslant 0,$$

откуда $t \leqslant \dfrac{1}{3}$ или $t \geqslant 1$.

При $t \leqslant \dfrac{1}{3}$ получаем $3^{x^2-1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, откуда $x^2 - 1 \leqslant -1$; $x^2 \leqslant 0$; $x = 0$.

При $t \geqslant 1$ получаем $3^{x^2-1} \geqslant 1$, откуда $x^2 - 1 \geqslant 0$; $(x-1)(x+1) \geqslant 0$, то есть $x \leqslant -1$ или $x \geqslant 1$.

Таким образом, решение получившегося неравенства $x \leqslant -1$; $x = 0$; $x \geqslant 1$.

Ответ: $(-\infty; -1]$; 0; $[1; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{80}{\left(5^{2-x^2}-5\right)^2}+\dfrac{16}{5^{2-x^2}-5}\leqslant 1.$

Решение.

Пусть $t=5^{2-x^2}-5$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{80}{t^2}+\frac{16}{t}\leqslant 1; \qquad \frac{80+16t-t^2}{t^2}\leqslant 0;$$

$$\frac{t^2-16t-80}{t^2}\geqslant 0; \qquad \frac{(t-20)(t+4)}{t^2}\geqslant 0,$$

откуда $t\leqslant -4$ или $t\geqslant 20$.

При $t\leqslant -4$ получаем $5^{2-x^2}-5\leqslant -4$, откуда $5^{2-x^2}\leqslant 1$; $2-x^2\leqslant 0$; $x^2\geqslant 2$, то есть $x\leqslant -\sqrt{2}$ или $x\geqslant \sqrt{2}$.

При $t\geqslant 20$ получаем $5^{2-x^2}-5\geqslant 20$, откуда $5^{2-x^2}\geqslant 25$; $2-x^2\geqslant 2$; $x^2\leqslant 0$; $x=0$.

Таким образом, решение получившегося неравенства $x\leqslant -\sqrt{2}$; $x=0$; $x\geqslant \sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$; 0; $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Наконец, разберём примеры, где для решения неравенства нужно воспользоваться свойствами показательной функции.

Пример 5. Решите неравенство $3^{x-4}+4^{x-5}+5^{x-6}<14$.

Решение.

Пусть $f(x)=3^{x-4}+4^{x-5}+5^{x-6}$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций. Поскольку $f(6)=14$, неравенство $f(x)<14$ будет выполнено при всех $x<6$ и только при этих значениях переменной.

Ответ: $(-\infty; 6)$.

Пример 6. Решите неравенство $4^{x^2+4x+4}+5^{x^2+4x+5}+6^{x^2+4x+6}\leqslant 42$.

Решение.

Перепишем неравенство, выделив полные квадраты в показателях степеней:

$$4^{(x+2)^2}+5^{(x+2)^2+1}+6^{(x+2)^2+2}\leqslant 42.$$

Поскольку $(x+2)^2\geqslant 0$, получим

$$4^{(x+2)^2}\geqslant 1, \qquad 5^{(x+2)^2+1}\geqslant 5, \qquad 6^{(x+2)^2+2}\geqslant 36.$$

Следовательно, сумма слагаемых в левой части исходного неравенства не меньше $1+5+36=42$. Значит, это неравенство может быть выполнено, только если эта сумма равна 42, что возможно, лишь если $(x+2)^2=0$, откуда $x=-2$.

Ответ: -2.