Подготовка к заданию 10 профильного ЕГЭ

Задания 10 профильного ЕГЭ по математике представляют собой задачи с прикладным содержанием, в которых нужно проанализировать явление, описываемое некоторой формулой. Для решения таких задач нужно аккуратно проинтерпретировать данные из условия, после чего задача сведётся к решению уравнения или неравенства.

В этом уроке мы разберём основные типы задач, возникающих на экзамене, постаравшись охватить как можно больше типов появляющихся уравнений и неравенств.

Начнём с примера, решение которого сводится к решению квадратного неравенства.

Пример 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1{,}6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Решение.

Составим неравенство по условию задачи и решим его:

$$1{,}6 + 8t - 5t^2 \geqslant 3; \qquad 5t^2 - 8t + 1{,}4 \leqslant 0;$$

$$25t^2 - 40t + 7 \leqslant 0; \qquad (5t-1)(5t-7) \leqslant 0,$$

откуда получаем, что мяч находится на высоте не менее 3 метров при $0{,}2 \leqslant t \leqslant 1{,}4$. Следовательно, мяч находится на такой высоте в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

В следующих двух примерах требуется решить дробно-рациональные уравнения или неравенства.

Пример 2. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \text{ (Гц)},$$

где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 315$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Решение.

Задача сводится к решению неравенства

$$f(v)-f_0\geqslant 10$$

при известных значениях$f_0=440$ Гц и $c=315$ м/с:

$$f(v)-f_0\geqslant 10;\qquad \frac{f_0}{1-\frac{v}{c}}-f_0\geqslant 10;\qquad \frac{f_0-f_0+f_0\cdot\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\geqslant 10;$$

$$\frac{f_0v}{c-v}\geqslant 10;\qquad \frac{440v}{315-v}\geqslant 10;\qquad \frac{450v-3150}{315-v}\geqslant 0,$$

откуда $7\leqslant v<315$. Следовательно, искомая скорость равна 7 м/с.

Ответ: 7.

Пример 3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 см до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение.

Предположим, что расстояние d_1 может быть произвольным. Поскольку $f=30$ см, получаем

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{30};\qquad \frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\dfrac{1}{30}-\dfrac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\dfrac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2. Поэтому наименьшее значение d_1 достигается при $d_2=180$ см, откуда

$$\frac{1}{d_1}=\frac{1}{30}-\frac{1}{180};\qquad \frac{1}{d_1}=\frac{5}{180};\qquad \frac{1}{d_1}=\frac{1}{36};\qquad d_1=36\ (\text{см}).$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 см до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1=36$ см удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

Разберём пример, решение которого сводится к решению несложного уравнения четвёртой степени.

Пример 4. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в Вт), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S —площадь поверхности звезды (в м^2), а T — температура (в К). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды. Ответ дайте в кельвинах.

Решение.

Задача сводится к нахождению T из уравнения $P = \sigma S T^4$ при известных значениях $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, $P = 9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт и $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2:

$$P = \sigma S T^4; \qquad T^4 = \frac{P}{\sigma S}; \qquad T^4 = \frac{9{,}12 \cdot 10^{25}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}; \qquad T^4 = 256 \cdot 10^{12},$$

откуда $T = \pm 4000$ К. Поскольку температура звезды (в кельвинах) не может быть отрицательной, искомое значение температуры это 4000 К.

Ответ: 4000.

Чтобы решить следующий пример, нужно решить иррациональное уравнение.

Пример 5. Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l —пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1 км, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Решение.

Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $v = \sqrt{2la}$ при известных значениях $l = 1$ км и $v = 100$ км/ч:

$$v = \sqrt{2la}; \qquad 100 = \sqrt{2a}; \qquad 2a = 10\,000; \qquad a = 5000\left(\text{км/ч}^2\right).$$

Ответ: 5000.

В следующем примере возникает показательное уравнение.

Пример 6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, τ — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 минут. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения

$$m = m_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}$$

при известных значениях $m_0 = 40$ мг, $m = 10$ мг и $T = 10$ минут:

$$10 = 40 \cdot 2^{-\frac{\tau}{10}}; \qquad 2^{-\frac{\tau}{10}} = 2^{-2}; \qquad -\frac{\tau}{10} = -2; \qquad \tau = 20 \text{ (мин.)}.$$

Ответ: 20.

Для решения следующего примера нужно решить логарифмическое уравнение.

Пример 7. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{п} = 20°C$, через радиатор пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{в} = 60°C$ до температуры T, причём

$$x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_{в} - T_{п}}{T - T_{п}},$$

где $c = 4200\,\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\,\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 84 м.

Решение.

Подставим в уравнение

$$x = \alpha \cdot \frac{cm}{\gamma} \cdot \log_2 \frac{T_{в} - T_{п}}{T - T_{п}},$$

значения известных величин $x = 84$ м, $\alpha = 0{,}7$, $c = 4200\,\frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot {}^\circ\text{C}}$, $m = 0{,}3$ кг/с, $\gamma = 21\,\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot {}^\circ\text{C}}$, $T_{в} = 60°C$, $T_{п} = 20°C$ и решим получившееся уравнение:

$$84 = 0{,}7 \cdot \frac{4200 \cdot 0{,}3}{21} \cdot \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20}; \qquad 84 = 42 \log_2 \frac{40}{T - 20}; \qquad \log_2 \frac{40}{T - 20} = 2;$$

$$\frac{40}{T - 20} = 4; \qquad T - 20 = 10; \qquad T = 30(°C)\ .$$

Ответ: 30.

Наконец, рассмотрим пример, при решении которого возникает простейшее тригонометрическое уравнение.

Пример 8. Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Решение.

Подставим в уравнение

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

значения известных величин $t = 3$ с, $v_0 = 30$ м/с, $g = 10$ м/с^2 и решим получившееся уравнение:

$$3 = \frac{2 \cdot 30 \sin\alpha}{10}; \qquad \sin\alpha = \frac{1}{2},$$

откуда, учитывая, что α — острый угол, получаем $\alpha = 30°$.

Ответ: 30.