Подготовка к заданию 17 ОГЭ

Задание 17 ОГЭ по математике представляет собой задачу, связанную с окружностями и их элементами. Приведём основные факты по теме «Окружность и круг»:

- центральный угол окружности измеряется дугой этой окружности, на которую он опирается;
- вписанный угол окружности равен половине центрального угла и измеряется половиной дуги, на которую он опирается;
- вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен 90°;
- касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведённому в точку касания;
- отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны;
- центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися внутри окружности, равен полусумме дуг, высекаемых на окружности вертикальными углами, образованными этими секущими;
- угол между двумя секущими к окружности, пересекающимися вне окружности, равен полуразности дуг, высекаемых на окружности углом, образованным этими секущими;
- две окружности не имеют общих точек в том и только том случае, если расстояние между их центрами больше суммы радиусов этих окружностей или меньше разности большего и меньшего радиусов;
- две окружности имеют ровно две общие точки (пересекаются в двух точках) в том и только том случае, если расстояние между их центрами меньше суммы радиусов этих окружностей, но больше разности большего и меньшего радиусов;
- две окружности имеют ровно одну общую точку (касаются) в том и только том случае, если расстояние между их центрами равно сумме радиусов этих окружностей (внешнее касание) либо равно разности большего и меньшего радиусов этих окружностей (внутреннее касание);
- длина окружности равна $2\pi r$, где r — радиус окружности;
- площадь круга равна πr^2, где r — радиус круга.

Пример 1. Длина окружности равна $6\sqrt{\pi}$. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

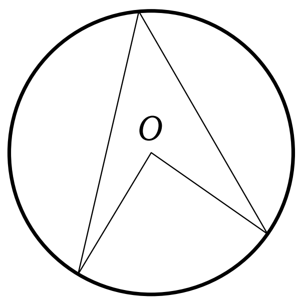
Решение.

Обозначим радиус окружности через r. Длина окружности равна $2\pi r = 6\sqrt{\pi}$, откуда $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$. Площадь круга радиуса $r = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ равна

$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 2. Центральный угол на 43° больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности.



а) Найдите вписанный угол. Ответ дайте в градусах.

б) Найдите центральный угол. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Обозначим градусную меру вписанного угла через x, тогда градусная мера центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол, будет равна $2x$. По условию $2x = x + 43$, откуда $x = 43$, а $2x = 86$.

Ответ: а) 43; б) 86.

Приведём основные факты, связанные с окружностью, вписанной в треугольник:

- в любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну;
- центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его биссектрис;
- радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен одной трети его биссектрисы (напомним, что она же является медианой и высотой равностороннего треугольника);
- площадь S треугольника равна произведению полупериметра p этого треугольника на радиус r вписанной окружности этого треугольника: $S = pr$.

Пример 3. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, одна из медиан которого равна 15.

Решение.

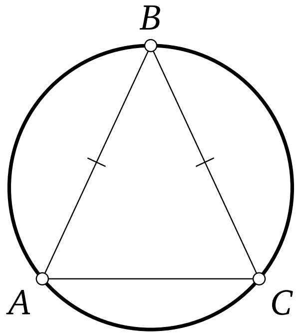
В равностороннем треугольнике все медианы равны и являются также биссектрисами и высотами. Радиус вписанной окружности равностороннего треугольника равен трети его биссектрисы и в данном случае равен 5.

Ответ: 5.

Напомним основные факты, связанные с окружностью, описанной около треугольника:

- около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну;
- центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- радиус описанной окружности равностороннего треугольника равен двум третям его высоты (напомним, что она же является медианой и биссектрисой равностороннего треугольника);
- центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус окружности равен половине гипотенузы;
- площадь S треугольника может быть найдена по формуле $S = \dfrac{abc}{4R}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, R — радиус описанной окружности треугольника.

Пример 4. Найдите угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, если сторона AB треугольника стягивает дугу описанной около него окружности, равную $130°$.



Решение.

По условию стороны AB и BC равны, значит, они стягивают равные дуги. Но тогда градусная величина дуги AC, не содержащей точки B, будет равна

$$360° - 2 \cdot 130° = 100°.$$

Вписанный угол ABC равен половине дуги, на которую он опирается, то есть равен 50°.

Ответ: 50.

Пример 5. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника с катетами 9 и 40.

Решение.

Поскольку центром описанной окружности прямоугольного треугольника является середина его гипотенузы, а радиус R окружности равен половине гипотенузы, для решения задачи достаточно с помощью теоремы Пифагора найти длину гипотенузы и поделить её на 2. Получим

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 40^2} = \frac{1}{2} \cdot 41 = 20{,}5.$$

Ответ: 20,5.

Напомним основные факты, связанные с окружностью, вписанной в четырёхугольник:

- в четырёхугольник можно вписать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных сторон равны;
- центром вписанной окружности четырёхугольника является точ- ка пересечения биссектрис его углов;
- в параллелограмм можно вписать окружность, только если он является ромбом;
- в любой ромб (а значит, и в квадрат) можно вписать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей ромба;
- радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине стороны квадрата;
- если в трапецию можно вписать окружность, то диаметр этой окружности равен высоте трапеции;
- площадь S четырёхугольника, в который можно вписать окружность (описанного четырёхугольника), равна произведению полупериметра p этого четырёхугольника на радиус r вписанной окружности этого четырёхугольника: $S = pr$.

Пример 6. Найдите периметр трапеции, в которую вписана окружность, если средняя линия трапеции равна 33.

Решение.

По свойству описанного четырёхугольника сумма оснований данной трапеции равна сумме её боковых сторон. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, значит, сумма оснований равна 66, как и сумма боковых сторон. Следовательно, периметр трапеции равен

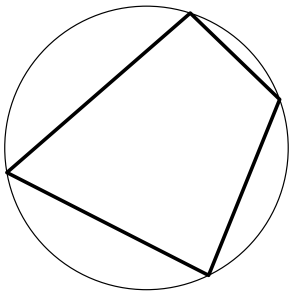
$$66 + 66 = 132.$$

Ответ: 132.

Укажем теперь основные факты, связанные с окружностью, описанной около четырёхугольника:

- около четырёхугольника можно описать окружность (и притом только одну) в том и только том случае, если суммы его противоположных углов равны (то есть каждая из этих сумм равна 180°);
- центром описанной окружности четырёхугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам;
- около параллелограмма можно описать окружность, только если он является прямоугольником;
- около любого прямоугольника (а значит, и квадрата) можно описать окружность; центром этой окружности является точка пересечения диагоналей прямоугольника, а её радиус равен половине диагонали прямоугольника;
- около трапеции можно описать окружность в том и только том случае, если она равнобедренная.

Пример 7. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 67° и 89°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

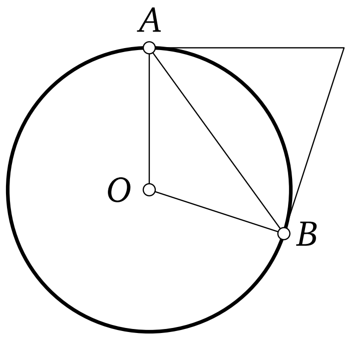


Решение.

Поскольку сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 180°, меньший из двух других его углов равен $180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$.

Ответ: 91.

Пример 8. Касательные в точках A и B к окружности с центром в точке O пересекаются под углом $72°$. Найдите угол ABO. Ответ дайте в градусах.



Решение.

Заметим, что треугольник, вершинами которого являются точки A, B и точка пересечения касательных, — равнобедренный, причём сторона AB является его основанием. Значит, угол A этого треугольника равен углу B, и равен $\dfrac{180° - 72°}{2} = 54°$. Поскольку радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, угол ABO равен $90° - 54° = 36°$.

Ответ: 36.