Подготовка к заданию 18 ОГЭ

Задание 18 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Четырёхугольники». Напомним свойства и теоремы, связанные с четырёхугольниками, изучаемыми в основной школе.

Сначала приведём основные факты, связанные с параллелограммом:

- противоположные стороны параллелограмма параллельны и равны;
- сумма углов параллелограмма равна $360°$;
- сумма двух углов параллелограмма, прилежащих к одной из его сторон, равна $180°$;
- диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Пусть a и b — длины двух смежных сторон параллелограмма, h_a и h_b — соответственно высоты, проведённые к этим сторонам, γ — угол между этими сторонами, S — площадь параллелограмма. Основные формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = ah_a = bh_b = ab\sin\gamma.$$

Кроме того, для параллелограмма, разумеется, справедлива и формула площади произвольного выпуклого четырёхугольника: если d_1 и d_2 — длины диагоналей выпуклого четырёхугольника, γ — угол между ними, то площадь S этого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними, то есть

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma.$$

Пример 1. Один из углов параллелограмма равен $41°$. Найдите больший угол этого параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

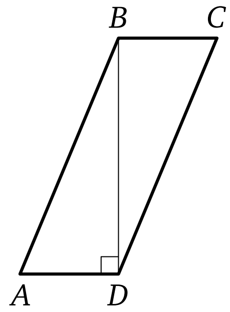
Решение.

Для того, чтобы найти больший угол параллелограмма, нужно из $180°$ вычесть меньший угол параллелограмма. Следовательно, больший угол этого параллелограмма равен

$$180° - 41° = 139°.$$

Ответ: $139°$.

Пример 2. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, в котором $AB = 13$, $AD = 5$, $BD = 12$.



Решение.

Задачу можно решать разными способами. По следствию теоремы косинусов для треугольника ABD можно найти косинус угла A, затем его синус, после чего вычислить площадь параллелограмма как произведение двух сторон на синус угла между ними. А можно заметить, что $5^2+12^2=169=13^2$ и, значит, $AB^2=AD^2+BD^2$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABD прямоугольный с прямым углом D, то есть диагональ BD параллелограмма является его высотой. Поэтому площадь S параллелограмма находится по формуле $S=AD\cdot BD=5\cdot 12=60$.

Ответ: 60.

Пример 3. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

Решение.

По формуле для площади параллелограмма имеем:

$$S = ah_a = (3+7)\cdot 4 = 40.$$

Ответ: 40.

Важнейшими частными случаями параллелограмма являются прямоугольник, ромб, квадрат. Они обладают всеми свойствами параллелограмма, но для них справедливы и некоторые дополнительные свойства, которыми произвольные параллелограммы не обладают:

- диагонали прямоугольника (а значит, и квадрата) равны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) взаимно перпендикулярны;
- диагонали ромба (а значит, и квадрата) являются биссектрисами его углов.

Площадь S прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон a и b, то есть $S=ab$. Площадь S квадрата равна квадрату его стороны a, то есть $S = a^2$. Для вычисления площадей прямоугольника и ромба можно использовать формулу площади выпуклого четырёхугольника. Поскольку диагонали d_1 и d_2 ромба взаимно перпендикулярны, из последней следует, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

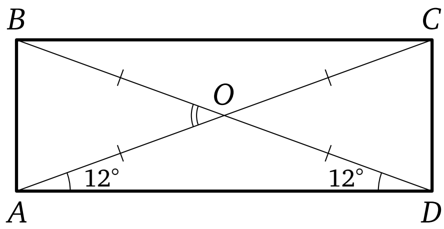
Пример 4. Диагональ квадрата равна $7\sqrt{2}$. Найдите его площадь.

Решение.

Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, значит, сторона этого квадрата равна 7, а площадь квадрата равна 49.

Ответ: 49.

Пример 5. Диагональ прямоугольника образует с одной из его сторон угол $12°$. Найдите угол между прямыми, содержащими диагонали этого прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

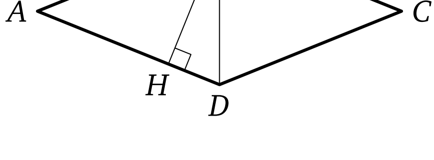


Решение.

Пусть $ABCD$ — данный прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $\angle CAD = 12°$. Поскольку диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, треугольник AOD равнобедренный, причём $\angle ODA = \angle OAD = 12°$. Значит, $\angle AOD$ тупой и не может быть углом между прямыми (напомним, что угол между двумя прямыми — меньший из вертикальных углов, образуемых при их пересечении, поэтому он не превосходит $90°$). Следовательно, искомый угол равен внешнему углу треугольника AOD (например, углу AOB) и, значит, равен сумме внутренних не смежных с ним углов, то есть сумме $\angle ODA + \angle OAD = 24°$.

Ответ: $24°$.

Пример 6. В ромбе $ABCD$ угол A равен $44°$. Из вершины B проведена высота BH к стороне AD. Найдите угол HBD. Ответ дайте в градусах.



Решение.

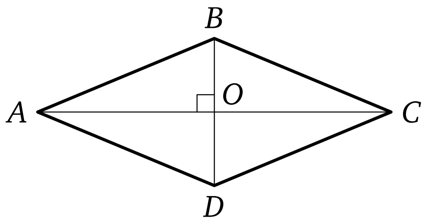
В ромбе все стороны равны, значит, треугольник BAD равнобедренный и

$$\angle ABD = \angle ADB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник BHD. Острый угол HDB в нём равен 68°, значит, угол HBD равен 22°.

Ответ: 22°.

Пример 7. Найдите площадь ромба, если его диагональ равна 24, а сторона равна 13.



Решение.

Пусть $ABCD$ — данный ромб, O — точка пересечения его диагоналей, и пусть $AB = BC = CD = AD = 13$, $AC = 24$. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $AO = 12$, а треугольник AOB прямоугольный. Из теоремы Пифагора для этого треугольника находим

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Тогда $BD = 10$, а площадь S ромба находится как половина произведения его диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120.$$

Ответ: 120.

Трапеция является более сложным четырёхугольником по сравнению с параллелограммом, поскольку у неё параллельны только две стороны (основания трапеции), а две другие не параллельны (боковые стороны трапеции). Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям, называется прямоугольной; трапеция, боковые стороны которой равны, называется равнобедренной (диагонали такой трапеции равны, углы при любом из оснований также равны). Средняя линия трапеции параллельна её основаниям и равна их полусумме.

Если a и b — длины оснований трапеции, h — её высота, то площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \dfrac{a+b}{2} h$.

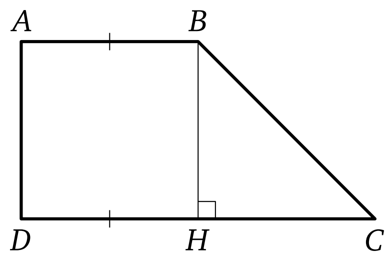
Пример 8. Сумма трёх углов равнобедренной трапеции равна 222°. Найдите меньший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

Решение.

Сумма всех углов трапеции равна $360°$, значит, её четвёртый угол равен $360° - 222° = 138°$. Угол, прилежащий к той же боковой стороне, что и найденный, равен $180° - 138° = 42°$. Два оставшихся угла также равны $138°$ и $42°$, поскольку в равнобедренной трапеции углы, прилежащие к одному основанию, равны. Значит, искомый угол этой трапеции равен $42°$.

Ответ: $42°$.

Пример 9. Найдите острый угол прямоугольной трапеции, основания которой равны 18 и 9, а меньшая боковая сторона равна 9. Ответ дайте в градусах.



Решение.

В любой прямоугольной трапеции два угла прямые, один тупой, и один острый. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$, в которой $AB = AD = 9$, $CD = 18$. Искомый угол — угол C. Проведём высоту BH. Она равна AD и равна 9. Тогда $DH = AB = 9$ (как противоположные стороны прямоугольника $ABHD$), и, значит, $CH = CD - DH = 9$. Но тогда в прямоугольном треугольнике BHC катеты равны, значит, это равнобедренный прямоугольный треугольник и угол C равен $45°$.

Ответ: $45°$.

Пример 10.

Основания трапеции относятся как $1 : 3$, а средняя линия равна 16. Найдите большее основание этой трапеции.

Решение.

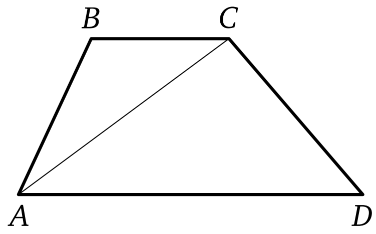
Пусть основания трапеции равны a и b, причём $a = 3b$. Тогда её средняя линия равна

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3b+b}{2} = 2b = 16,$$

откуда $b = 8$. Значит, $a = 24$.

Ответ: 24.

Пример 11. Основания трапеции относятся как $2 : 5$. Диагональ делит трапецию на два треугольника, площадь меньшего из которых равна 4. Найдите площадь трапеции.



Решение.

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, считая, что $AD : BC = 5 : 2$. Диагональ AC делит трапецию на два треугольника, имеющих общую высоту — высоту трапеции. Значит, их площади относятся как основания, к которым проведена эта высота, то есть как основания трапеции. При этом треугольник меньшей площади будет иметь меньшее основание. Тогда $S_{ABC} = 4$, $\dfrac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \dfrac{5}{2}$, откуда $S_{ACD} = \dfrac{5}{2}S_{ABC} = 10$. Следовательно, $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 14$.

Ответ: 14.