График линейной функции. Подводящие задачи.

Задача 1. Вчера одна акция компании "Clever Solutions" стоила 1\$. Сегодня цена одной акции составляет 0,8\$. Аналитик делает прогноз, что завтра цена опустится до 0,6\$.
а) Начертите график цены одной акции (в \$) в зависимости от времени (в днях).
б) Прогноз аналитика оказался точным. Можно ли аналогичным образом сделать прогноз на три дня вперед?

Задача 2. Физик проводит опыт. У него есть пружина, подвешенная за один конец к неподвижной стойке. Длина пружины составляет 6 см. Физик подвесил на свободный конец пружины груз массой 100 г, и пружина растянулась до 8 см. Потом дополнительно подвесил груз массой 200 г, и длина пружины составила 12 см.
а) Начертите график зависимости длины пружины (в см) в зависимости от массы подвешенного груза (в г).
б) Можно ли, не проводя опыт, найти длину пружины, к которой подвесили груз массой 500 г?

Задача 3. Постройте на одном графике зависимости, заданные следующими формулами,

а) $y_1(x) = x + 1$; б) $y_2(x) = x + 2$; в) $y_3(x) = x - 1$.

Для этого заполните таблицу

x	-1	0	0,5	1	2
y_1					
y_2					
y_3					

Отметьте точки, заданные в таблице, на графике. Как меняется график при изменении числа, которое мы прибавляем к x?

Задача 4. Постройте на одном графике зависимости, заданные следующими формулами,

а) $y_1(x) = 2 \cdot x$; б) $y_2(x) = 3 \cdot x$; в) $y_3(x) = -1 \cdot x$.

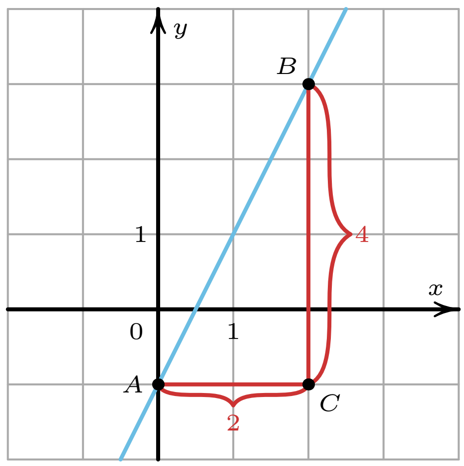
Для этого заполните таблицу

x	-1	0	0,5	1	2
y_1					
y_2					
y_3					

Отметьте точки, заданные в таблице, на графике. Как меняется график при изменении числа, на которое мы умножаем x?

Анализ графика линейной функции.

Пример 1. На чертеже изображён график функции $y(x) = kx + b$. Определите уравнение этой прямой.

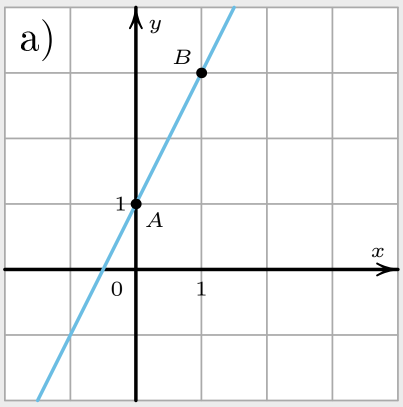


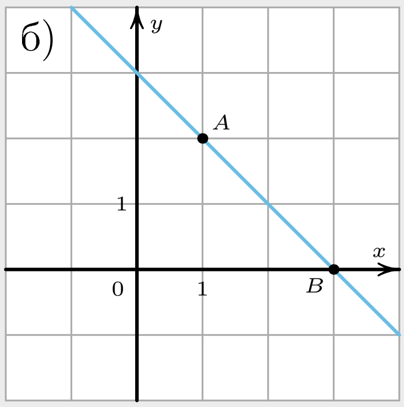
Решение. Коэффициент k показывает, насколько изменяется значение функции за одну клетку. Из чертежа видим, что от точки $A(0;\ -1)$ до точки $B(2;\ 3)$ значение функции увеличилось на $3 - (-1) = 4$. Это изменение произошло за $2 - 0 = 2$ клетки. Следовательно, за одну клетку изменение функции равно $\frac{4}{2} = 2$, то есть $k = 2$.

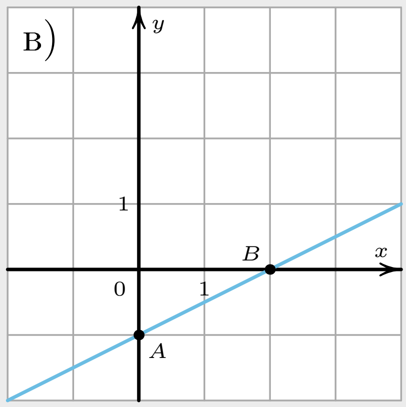
Коэффициент b показывает ординату точки пересечения прямой с осью y. Из чертежа видим, что наша прямая пересекается с осью y в точке $A(0;\ -1)$. То есть $b = -1$.

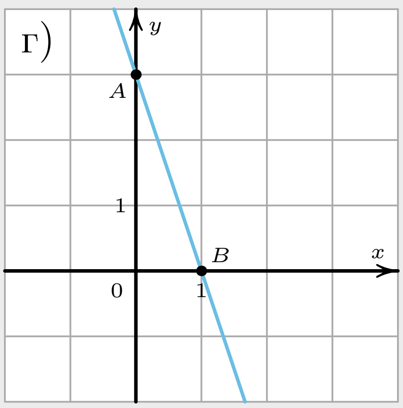
Ответ: $y(x) = 2x - 1$.

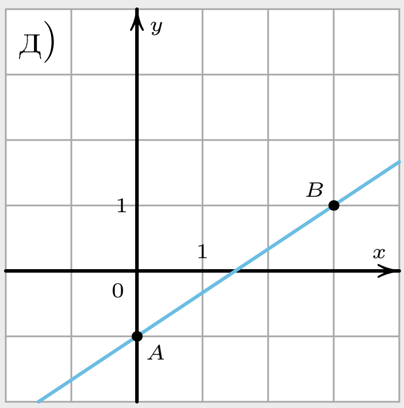
Задача 5. На чертеже изображён график функции $y(x) = kx + b$. Определите уравнение этой прямой.

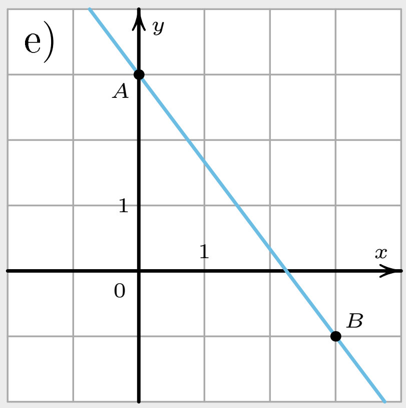




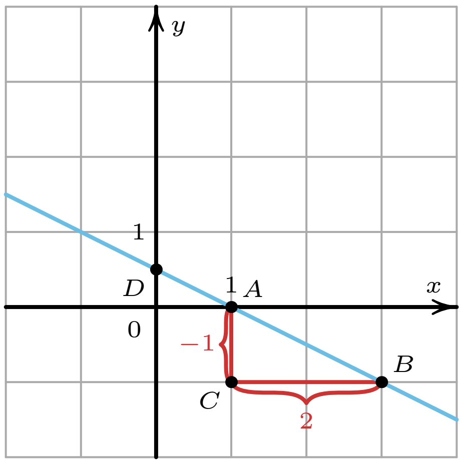








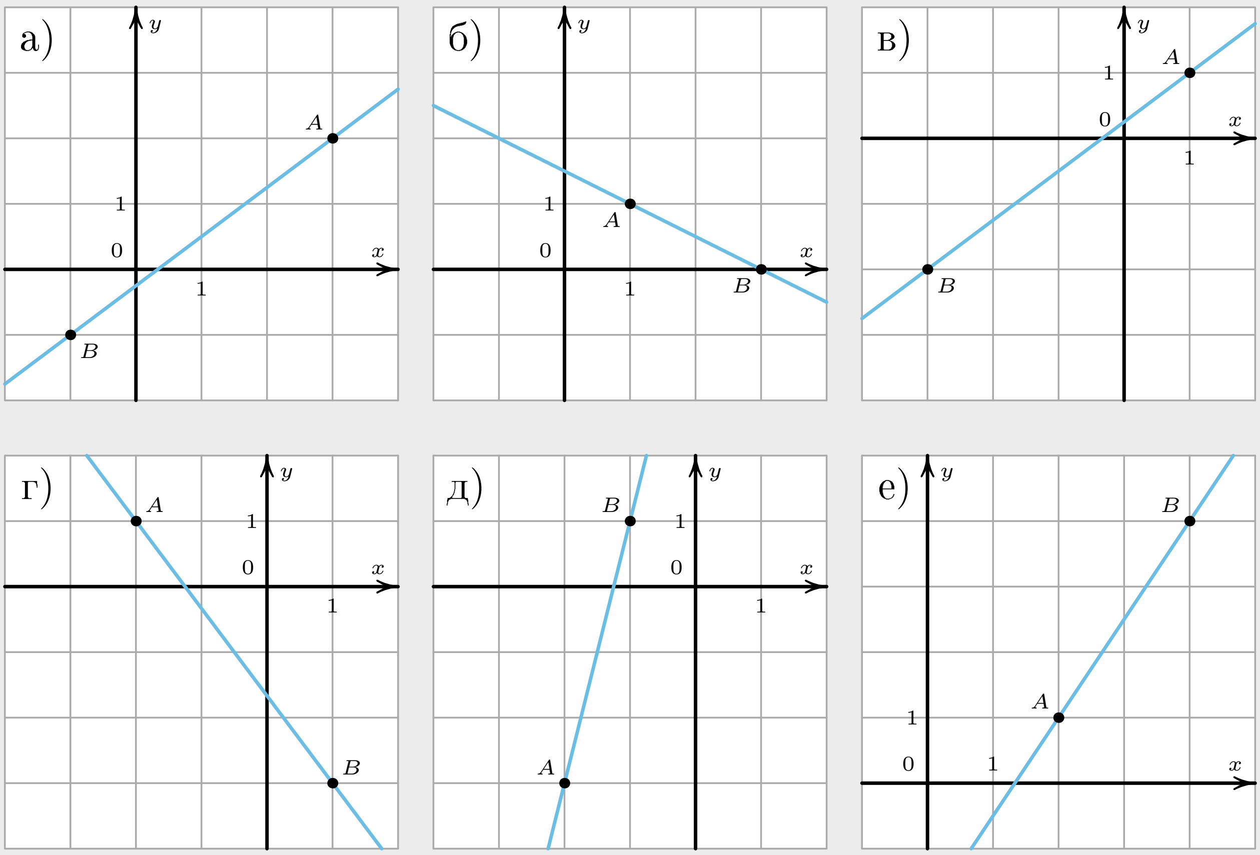
Пример 2. На чертеже изображён график функции $y(x) = kx + b$. Определите уравнение этой прямой.



Решение. Определим коэффициент k аналогично примеру 1. На графике видим, что значение функции от точки A до точки B уменьшилось на 1. Это изменение произошло за 2 клетки. Значит, за одну клетку прямая опускается на $\frac{1}{2}$, откуда $k = -\frac{1}{2}$. Обозначим D точку пересечения нашей прямой и оси y. Так как $k = -\frac{1}{2}$, то от точки D до точки $A(1;\ 0)$ прямая опускается на $\frac{1}{2}$. Откуда ордината точки D на $\frac{1}{2}$ больше ординаты точки A и равна $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Значит, и $b = \frac{1}{2}$.

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$.

Задача 6. На чертеже изображён график функции $y(x) = kx + b$. Определите уравнение этой прямой.



Пример 3. На чертеже изображены графики двух линейных функций. Найдите координаты точки их пересечения.

Решение. Аналогично примеру 1 находим уравнение синей прямой: $y(x) = 4x + 3$. Аналогично примеру 2 находим уравнение зелёной прямой: $y(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2}$. В точке пересечения обе прямые находятся на равной высоте, то есть в точке пересечения значения наших функций равны. Приравняем их, получим уравнение

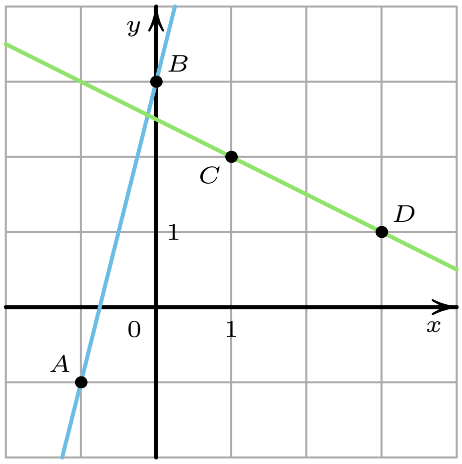
$$4x + 3 = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{5}{2}.$$

Домножим это уравнение на 2, будем иметь

$$8x + 6 = -x + 5 \Rightarrow 9x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{9}.$$

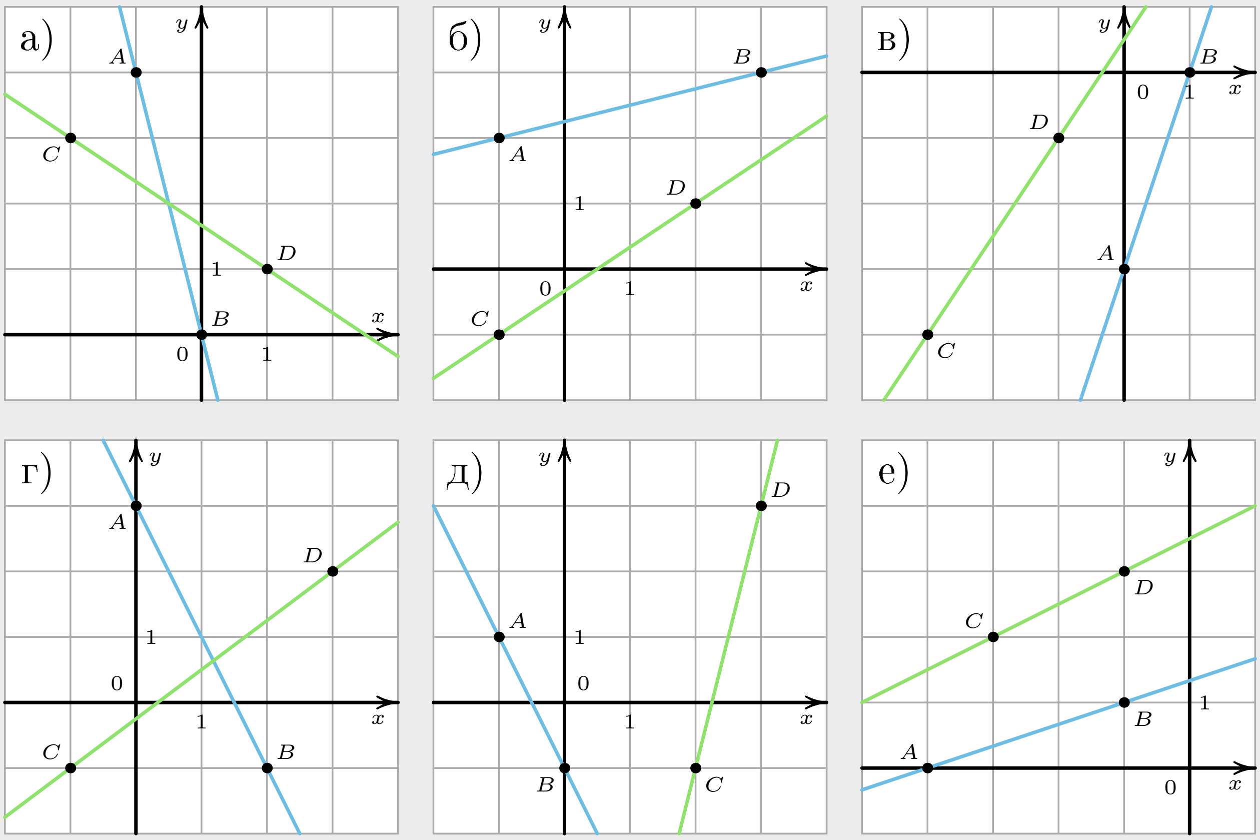
Чтобы найти ординату точки пересечения, подставим найденное значение x в любое из уравнений прямых выше, например, в первое:

$$y\left(-\frac{1}{9}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + 3 = \frac{23}{9}.$$



Ответ: $\left(-\frac{1}{9};\ \frac{23}{9}\right)$.

Задача 7. На чертеже изображены графики двух линейных функций. Найдите координаты точки их пересечения.



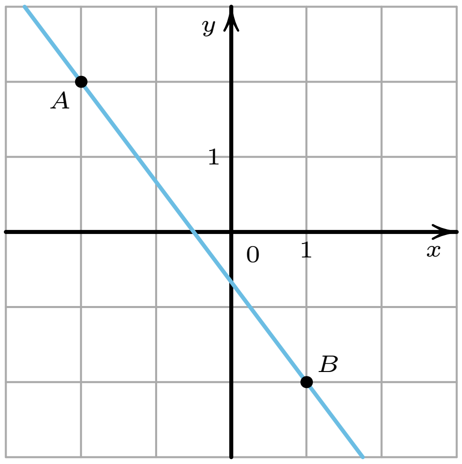
Пример 4. На чертеже изображен график линейной функции. Определите убывает эта функция или возрастает, докажите это. Найдите максимальное значение этой функции на отрезке $[10;\ 21]$.

Решение. Аналогично примеру 2 находим уравнение прямой: $y(x) = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{2}{3}$. Докажем, что функция $y(x)$ убывающая. Пусть $x_2 - x_1 > 0$. Тогда

$$y(x_2) - y(x_1) = -\frac{4}{3} \cdot (x_2 - x_1) < 0.$$

То есть из $x_2 > x_1$ следует, что $y(x_2) < y(x_1)$. Значит, функция $y(x)$ по определению убывающая. Следовательно, наибольшее значение этой функции достигается при наименьшем x из заданного отрезка, то есть при $x = 10$. Находим

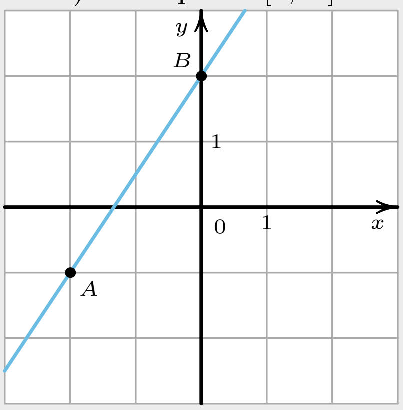
$$y(10) = -\frac{4}{3} \cdot 10 - \frac{2}{3} = -14.$$



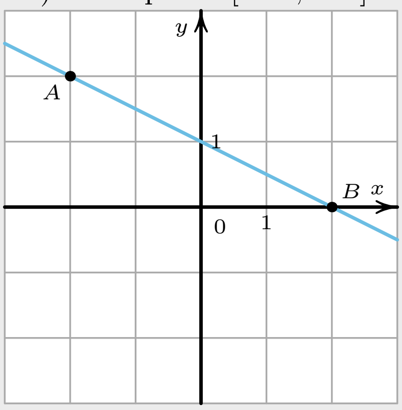
Ответ: -14.

Задача 8. На чертеже изображен график линейной функции. Определите убывает эта функция или возрастает, докажите это. Найдите максимальное и минимальное значения этой функции на заданном отрезке.

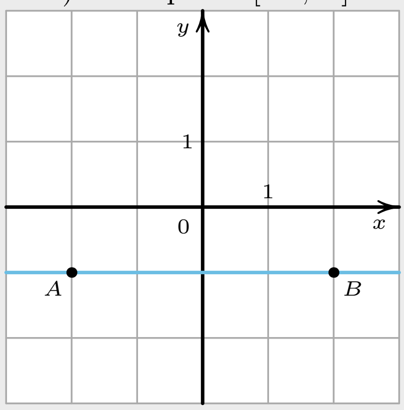
а) На отрезке $[7;\ 8]$.



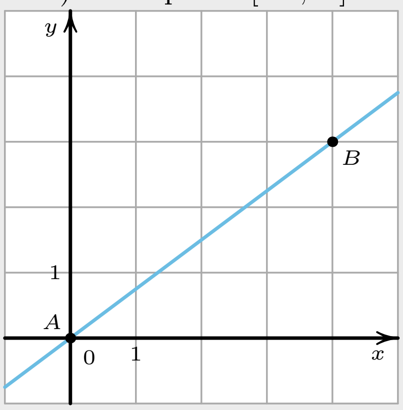
б) На отрезке $[-12;\ -9]$.



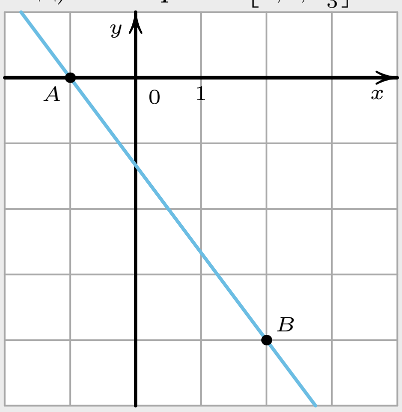
в) На отрезке $[-5;\ 7]$.



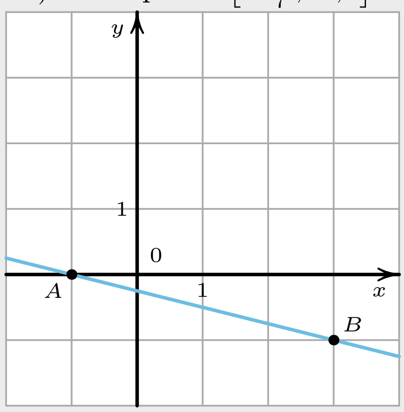
г) На отрезке $[-1;\ 6]$.



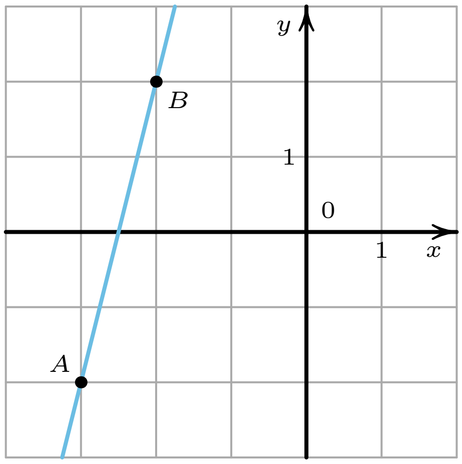
д) На отрезке $\left[0{,}5;\ \frac{7}{3}\right]$.



е) На отрезке $\left[-\frac{20}{7};\ 1{,}6\right]$.



Пример 5. На чертеже изображен график линейной функции. Найдите количество целых значений этой функции на отрезке $[-1; 9]$.

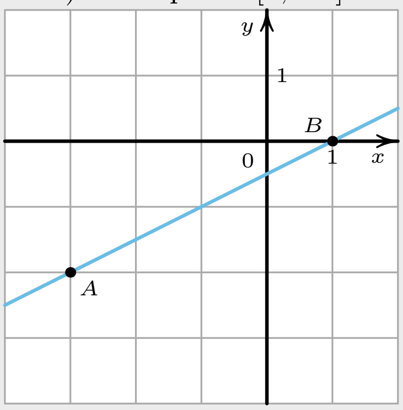


Решение. Аналогично примеру 2 находим уравнение прямой: $y(x) = 4x + 8$. Аналогично примеру 4 проверяем, что эта функция возрастающая. Следовательно, наибольшего своего значения она достигает при наибольшем x из заданного отрезка, наименьшего — при наименьшем. Итак, наименьшее значение функции на отрезке $[-1;\ 9]$ равно $y(-1) = -4$, наибольшее: $y(9) = 44$. Примем без доказательства факт, что функция $y(x)$ принимает на отрезке все значения от наименьшего до наибольшего (это следует из свойства *непрерывности*). Таким образом, всего целых значений $44 - (-4) + 1 = 49$.

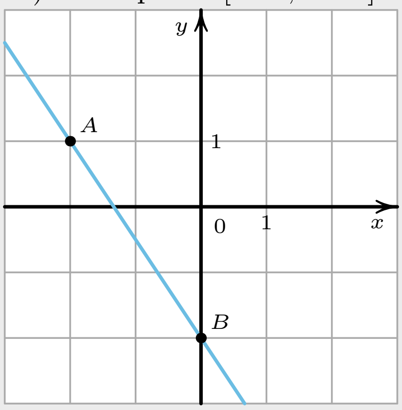
Ответ: 49.

Задача 9. На чертеже изображен график линейной функции. Найдите количество целых значений этой функции на заданном отрезке.

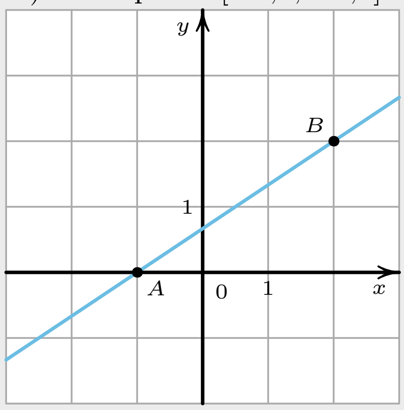
а) На отрезке $[0;\ 10]$.



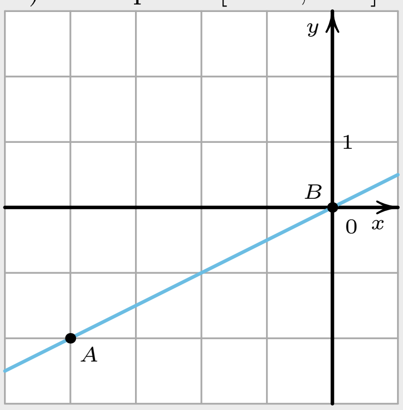
б) На отрезке $[-87;\ -16]$.



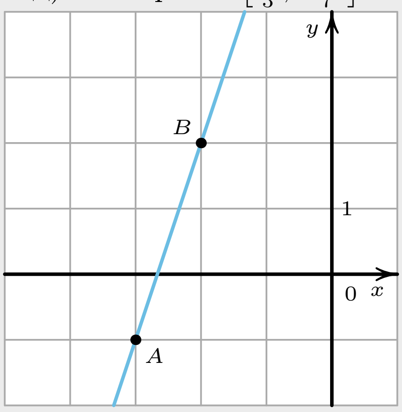
в) На отрезке $[-1{,}5;\ 11{,}5]$.



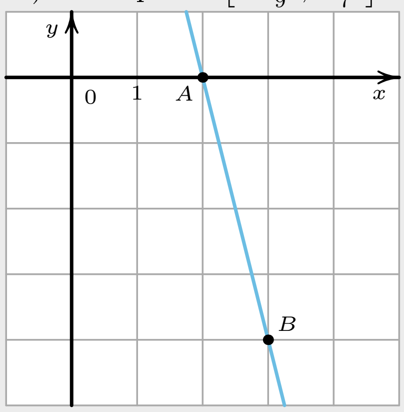
г) На отрезке $[-101;\ 101]$.



д) На отрезке $\left[\frac{11}{3};\ \frac{145}{7}\right]$.

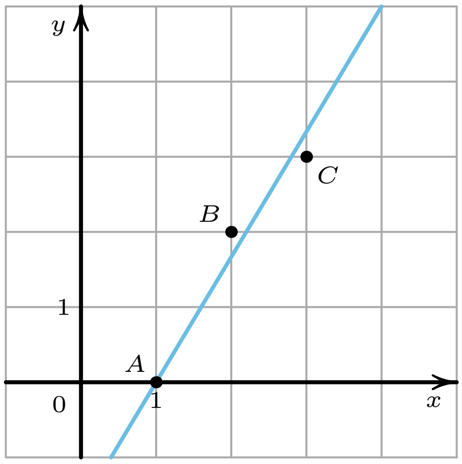


е) На отрезке $\left[-\frac{100}{9};\ \frac{100}{7}\right]$.

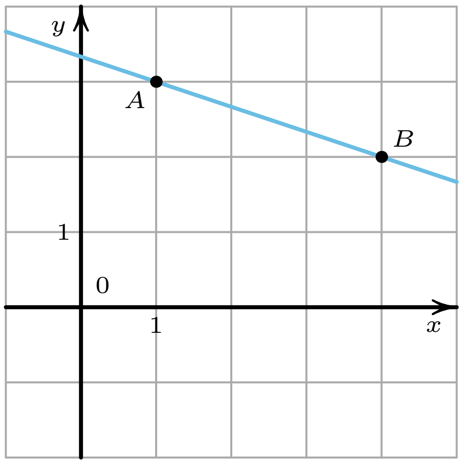


Исследовательские задачи.

Задача 10. На чертеже изображен график функции $y(x) = kx + b$. С помощью отмеченных на чертеже точек оцените числа k и b.



Задача 11. На чертеже изображен график линейной функции. Найдите количество точек с целыми координатами, расположенных на этой прямой, не выходящих за пределы прямоугольника с вершинами в точках $M(21;\ -12)$, $N(21;\ 13)$, $K(45;\ 13)$, $P(45;\ -12)$.



Задача 12. Известно, что график функции $y(x) = kx + b$ проходит через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, причём $x_1 \neq x_2$. Выразите числа k и b через x_1, y_1, x_2 и y_2.

Ответы.

№1. Можно, но прогноз вряд ли будет правдоподобным.

№2. 16 см, если линейная зависимость сохранится.

№3. Прямая поднимается или опускается.

№4. Прямая поворачивается.

№5. а) $2x+1$; б) $-x+3$; в) $\frac{1}{2}\cdot x-1$; г) $-3x+3$; д) $\frac{2}{3}\cdot x-1$; е) $-\frac{4}{3}\cdot x+3$.

№6. а) $\frac{3}{4}\cdot x-\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$; в) $\frac{3}{4}\cdot x+\frac{1}{4}$; г) $-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{5}{3}$; д) $4x+5$; е) $\frac{3}{2}\cdot x-2$.

№7. а) $\left(-\frac{1}{2};\ 2\right)$; б) $\left(\frac{13}{5};\ \frac{7}{5}\right)$; в) $\left(\frac{7}{3};\ 4\right)$; г) $\left(\frac{13}{11};\ \frac{7}{11}\right)$; д) $\left(\frac{4}{3};\ -\frac{11}{3}\right)$; е) $(-13;\ 3)$.

№8. а) $y_{max}=14$, $y_{min}=\frac{25}{2}$; б) $y_{max}=7$, $y_{min}=\frac{11}{2}$; в) $y_{max}=-1$, $y_{min}=-1$;
г) $y_{max}=\frac{9}{2}$, $y_{min}=-\frac{3}{4}$; д) $y_{max}=-2$, $y_{min}=-\frac{40}{9}$; е) $y_{max}=\frac{13}{28}$, $y_{min}=-\frac{13}{4}$.

№9. а) 5; б) 117; в) 9; г) 101; д) 52; е) 102.

№10. $k\in\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$, $b\in\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right)$.

№11. 8.

№12. $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$; $b=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$.