Справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ

Всё о треугольниках

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Гимназия №2» г. Брянска (8(483)257-1248) г. Брянск-2022

Справочник для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ по теме: «Треугольник».

Выполнила: ученица 10 «Б» класса
МБОУ «Гимназия №2» г. Брянска
Симоненкова Мария Андреевна

Руководитель: учитель математики
МБОУ «Гимназия №2» г. Брянска

Введение:

Этот справочник предназначен для подготовки к ОГЭ И ЕГЭ по геометрии по теме «Треугольники». Он представляет собой общедоступное пособие для повторения школьного курса по геометрии и для ознакомления с её практическим применением. Помимо того, этот справочник содержит формулы, использование которых облегчит решение некоторых видов задач по геометрии. Повторение и практика увеличит шансы на успешную сдачу основного государственного экзамена и единого государственного экзамена по математике.

Желаем удачи!

Содержание:

Введение……..3
Виды треугольников……...5
- По углам……..5
- По сторонам……6

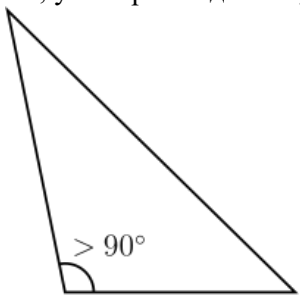
Общие свойства треугольников……7
Внешний угол треугольника…….…… .7
Прямоугольный треугольник.....8
- Теорема Пифагора……..9
- Синус, косинус, тангенс и котангенс в прямоугольном треугольнике……..10
- Основное тригонометрическое тождество и его доказательство…….……..11
- Пропорциональные отрезки……..12

Равнобедренный треугольник.....13
Правильный треугольник……...14
Равенство треугольников……15
Подобие треугольников……..17
Медиана треугольника……18
Высота треугольника……..19
Биссектриса треугольника.....20
Средняя линия треугольника.....21
Серединный перпендикуляр.....22
Окружность, описанная около треугольника.....23
Окружность, вписанная в треугольник……..……..……24
Формулы для нахождения радиусов…….……..……...25
Периметр треугольника……..26
Площадь треугольника…….……..29
Теорема синусов……..34
Теорема косинусов……..35
Примеры решения заданий из ЕГЭ и ОГЭ……..….……36
Задачи для самостоятельного решения……45
Ответы……..46
Справочный материал……47

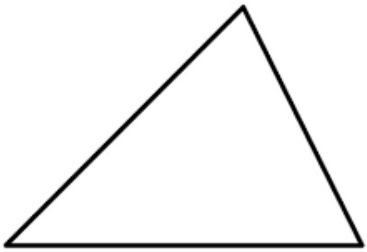
Виды треугольников

По углам:

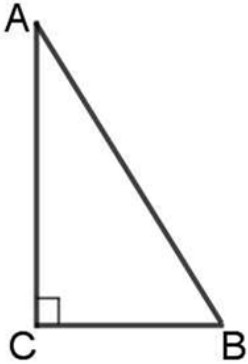
1) *Тупоугольный* - треугольник, у которого один из углов тупой(>90°)



2) *Остроугольный* - треугольник, у которого *все* углы острые(>90°)

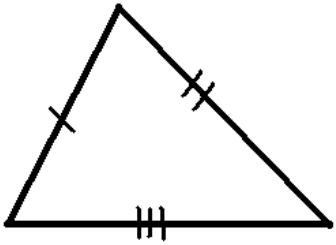


3) *Прямоугольный* - треугольник, у которого один из углов прямой(=90°)

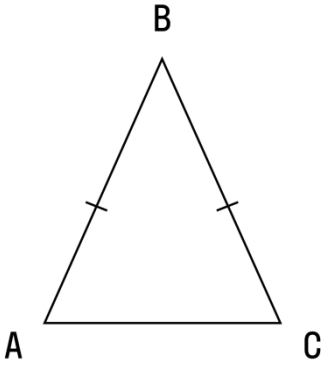


По сторонам:

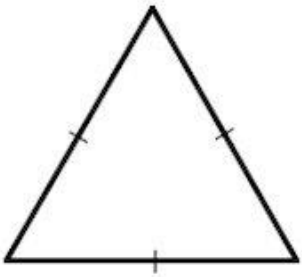
1) *Разносторонний* - треугольник, у которого все стороны различны по длине.



2) *Равнобедренный* - треугольник, у которого две стороны равны.

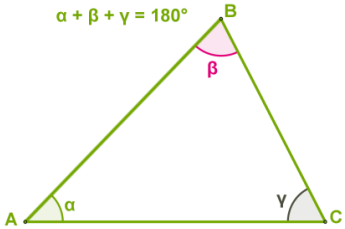


3) *Равносторонний* - треугольник, у которого все стороны равны.



Свойства треугольников

- Сумма углов треугольника равна 180°



- В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.

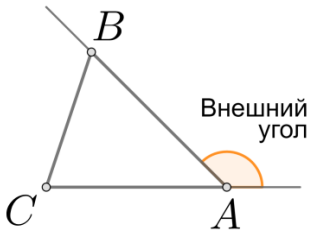
$$a<b+c,\ b<a+c,\ c<a+b$$

- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против большего угла лежит боль45ший угол.

Внешний угол треугольника

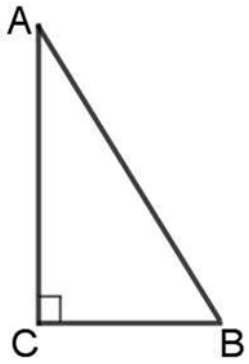
Внешний угол- это угол, смежный с внутренним углом треугольника. Свойства:

1) Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов.
2) Сумма внешнего и внутреннего угла при одной вершине равна 180∘.
3) Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, не смежного с ним



Прямоугольный Треугольник

<u>Прямоугольный треугольник</u>- Треугольник, один угол которого равен 90° Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**, две другие стороны называются **катетами**.



<u>Свойства:</u>

Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°

Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузе.

Теорема Пифагора

<u>Определение</u>: в прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

Формула Теоремы Пифагора выглядит так:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

где a, b — катеты, c — гипотенуза

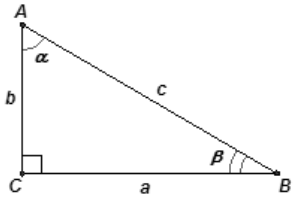
Обратная теорема используется как признак прямоугольного треугольника:

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник является прямоугольным.

Для треугольника со сторонами a, b и c, где c — большая сторона, действуют следующие правила:

- если $c^2 < a^2 + b^2$, значит угол, противолежащий стороне c, является острым.
- если $c^2 = a^2 + b^2$, значит угол, противолежащий стороне c, является прямым.
- если $c^2 > a^2 + b^2$, значит угол, противолежащий стороне c, является тупым.

Синус, косинус, тангенс и котангенс прямоугольного треугольника



<u>Определения:</u>

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

$$\boldsymbol{sin\alpha = \frac{a}{c}, sin\beta = \frac{b}{c}}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к гипотенузе.

$$\mathbf{cos\alpha = \frac{b}{c}}, \boldsymbol{cos\beta = \frac{a}{c}}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего этому углу катета к прилежащему катету.

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{a}{b}, tg\beta = \frac{b}{a}}$$

Или

$$\boldsymbol{tg\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}}$$

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего к этому углу катета к противолежащему катету.

$$\boldsymbol{ctg\alpha = \frac{a}{b}}$$

- С помощью введённых понятий можно находить катеты или гипотенузу.

Например, из формулы:

$\boldsymbol{sin\alpha = \frac{a}{c}}$ **=> a = c·sinα**

Основное тригонометрическое тождество

Основное тригонометрическое тождество:

$$\boxed{sin^2\alpha\ + cos^2\alpha = 1}$$

Примечание:$sin^2\alpha = (sin\alpha)^2$

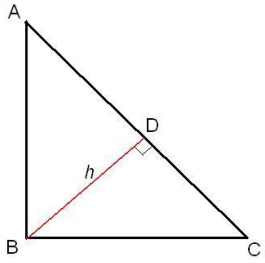
Доказательство:

$sin\alpha = \frac{a}{c}$, $cos\alpha = \frac{b}{c}$, тогда:$sin^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

(при доказательстве мы пользовались теоремой Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$).

Доказано.

Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



1°. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой

$$\boldsymbol{BD = \sqrt{AD \cdot DC}}$$

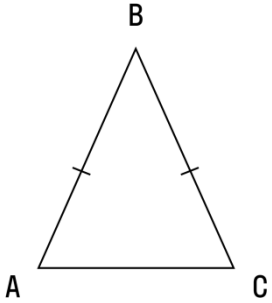
2°. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённой между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{AC \cdot AD}}$$

$$\boldsymbol{BC = \sqrt{AC \cdot DC}}$$

Равнобедренный треугольник

Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны.

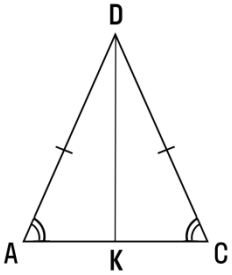


AB и BC — боковые стороны,

AC — основание треугольника.

Свойства равнобедренного треугольника:

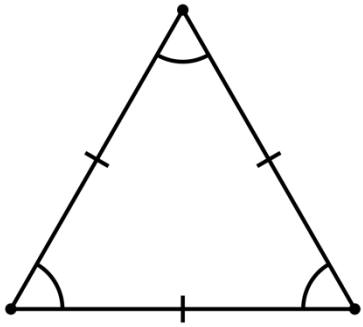
- В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



- В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой
- Высоты(биссектрисы, медианы), проведённые к боковым сторонам, равны.

Правильный треугольник

Правильный треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны. Правильный треугольник еще называют *равносторонним.*



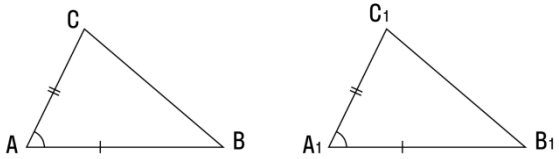
Свойства:

- Все углы равностороннего треугольник равны 60°.
- В равностороннем треугольнике каждая биссектриса совпадает с медианой и высотой. Также совпадают и точки пересечения этих отрезков. Получившаяся точка зовется центром фигуры.
- Центр правильного треугольника делит его высоты в отношении 2:1, считая от вершины.

Равенство треугольников

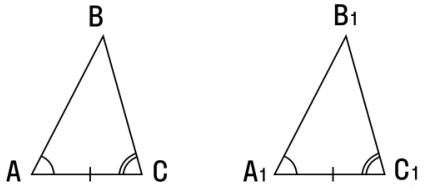
Теорема 1. Равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.



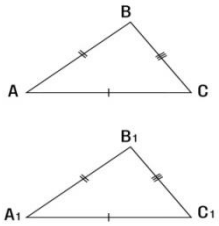
Теорема 2. Равенство треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



Теорема 3. Равенство треугольников по трем сторонам.

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

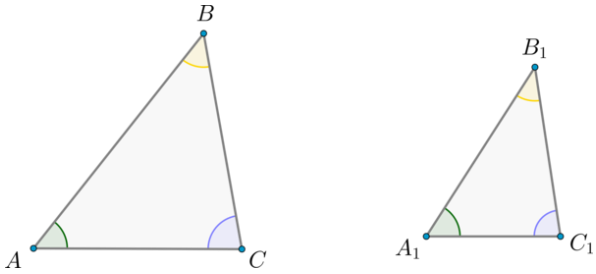


Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.
2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.
3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.
4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорционально сходственны сторонам другого треугольника



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A1B1}=\frac{BC}{B1C1}=\frac{AC}{A1C1}=k$$

Число **k**, которое является соотношением соответственных сторон, называется коэффициентом подобия треугольников.

При записи подобия треугольников важно соблюдать порядок букв. Равным углам соответствуют определённые буквы.

Свойства:

Отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия:

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A1B1C1}} = k$$

Соотношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициенту подобия:

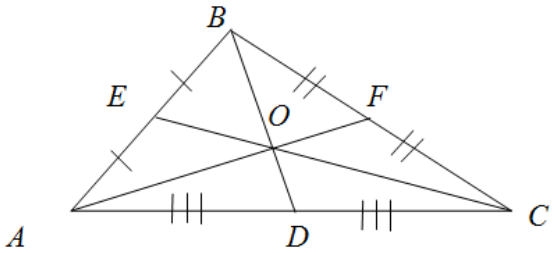
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A1B1C1}} = k^2$$

Медиана треугольника

Медиана – это отрезок, соединяющий высоту и середину противоположной стороны. В треугольнике три вершины, а значит и медианы три.

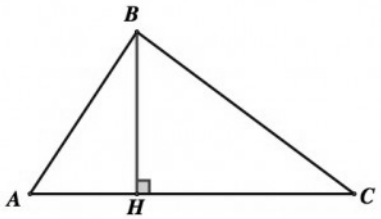
Свойства медиан:

- Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, совпадает с высотой и биссектрисой. В равностороннем треугольнике все медианы совпадают с биссектрисами и высотами.
- Все медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Медиана делит треугольник на два равновеликих, а три медианы, на 6 равновеликих треугольников.(Равновеликими называют треугольники, площади которых равны.)
- Точка пересечения медиан делит их в отношении 2:1, считая от вершины.
- Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.



Высота треугольника

<u>Высота</u> – это перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

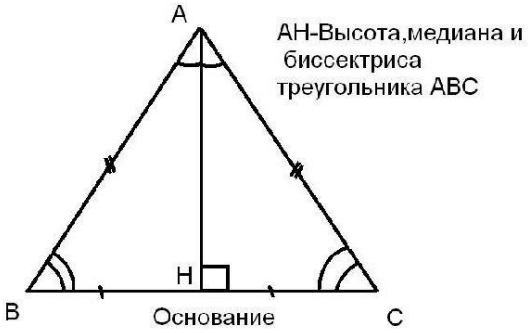


Как правило, высоту треугольника обозначают буквой ***h.*** Также обозначается высота и в других фигурах.

Для равнобедренного треугольника важно знать, какая именно сторона является основанием. Это определяет боковые стороны, которое должны быть равны, а так же высоту, на которую действую некоторые свойства.

Свойства высоты равнобедренного треугольника, проведенной к основанию:

- Высота совпадает с медианой и биссектрисой
- Делит основание на две равные части.



Биссектриса треугольника

<u>Биссектрисой треугольника</u> называется отрезок, который соединяет вершину с противоположной стороной и делит соответствующий угол пополам.

Каждый треугольник имеет три биссектрисы.

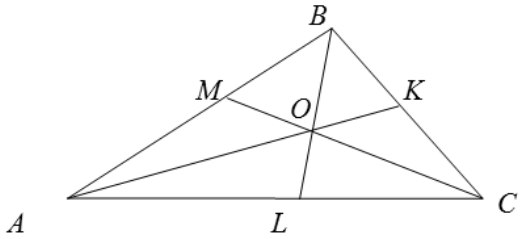


Рис. 1

Свойства биссектрисы

1. Биссектриса треугольника делит угол пополам.
2. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон ($\frac{AB}{BC} = \frac{LA}{LC}$)
3. Точки биссектрисы угла треугольника равноудалены от сторон этого угла.
4. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вписанной в этот треугольник окружности.

Средняя линия треугольника

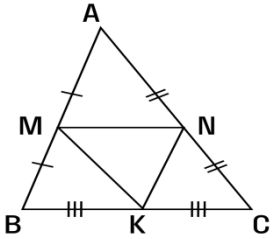
<u>Средняя линия треугольника</u> — отрезок, который соединяет середины двух сторон. В любом треугольнике можно провести три средних линии.

Средняя линия параллельна третьей стороне, а ее длина равна половине длины этой стороны

$$\boldsymbol{MN \| BC}$$

$$\boldsymbol{MN = \frac{1}{2} BC}$$

Основанием считается сторона, которой параллельна средняя линия.



<u>Признак средней линии треугольника</u>:

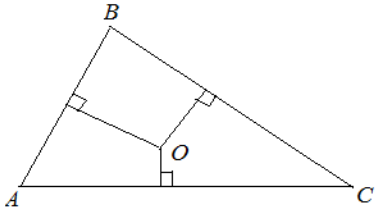
Если отрезок в треугольнике проходит через середину одной из его сторон, пересекает вторую и параллелен третьей — этот отрезок можно назвать средней линией этого треугольника.

Свойства средней линии треугольника:

- Средняя линия равна половине длины основания и параллельна ему.
- Средняя линия отсекает треугольник, подобный данному, с коэффициентом 1/2; его площадь равна четверти площади данного.
- Три средние линии разделяют исходную фигуру на четыре равных треугольника. Центральный из них называют дополнительным.
- Три средние линии разделяют исходный прямоугольный треугольник на четыре равных прямоугольных треугольника.

Серединный перпендикуляр

<u>Серединный перпендикуляр</u> треугольника – это перпендикуляр, проведенный к середине стороны треугольника.



Три срединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром описанной окружности.

Точка пересечения серединных перпендикуляров в остроугольном треугольнике лежит внутри треугольника; в тупоугольном – вне треугольника; в прямоугольном – на середине гипотенузы.

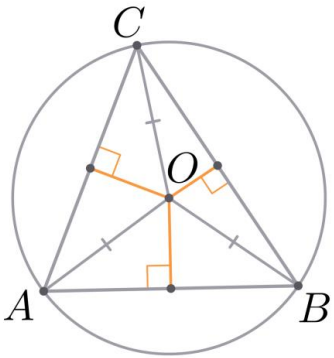
Свойства срединных перпендикуляров треугольника:

- Любая точка серединного перпендикуляра к стороне равноудалена от концов этой стороны.
- Любая точка, равноудаленная от концов стороны, лежит на серединном перпендикуляре к ней.
- Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

Окружность, описанная около треугольника

Окружность называют **<u>описанной около треугольника</u>**, если все вершины треугольника расположены на окружности.

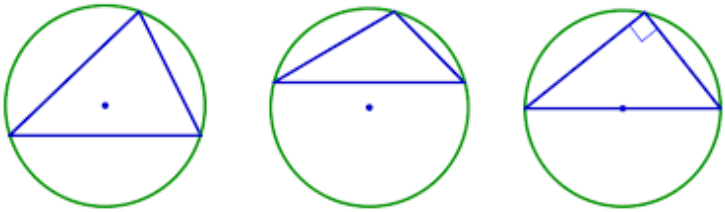
Теорема 1. Вокруг любого треугольника можно описать окружность, причем только одну. Ее центр – это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.



- Для остроугольного треугольника центр окружности находится внутри треугольника.

Другая ситуация с прямоугольным и тупоугольным треугольником:

- **Теорема 2.** Центр окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, а радиус этой окружности равен половине гипотенузы.
- В тупоугольном треугольнике центр окружности лежит вне треугольника, вписанного в эту окружность.

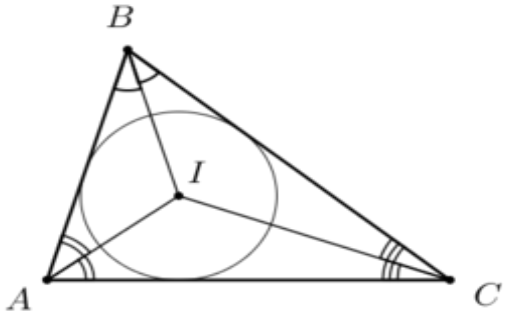


Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называют **вписанной в треугольник**, если все стороны треугольника касаются окружности.

- Её центр равноудалён от всех сторон, то есть должен находиться в точке пересечения биссектрис углов этого треугольника.

Теорема 3. В любой треугольник можно вписать окружность, причем только одну. Ее центром является точка пересечения биссектрис треугольника.



Так как биссектрисы углов всегда пересекаются внутри треугольника, то и центр окружности всегда находится внутри треугольника.

Формулы:

Равносторонний треугольник.

Обрати внимание!

У равностороннего треугольника совпадают медианы, биссектрисы и высоты, то есть, эти отрезки являются также серединными перпендикулярами. Это значит, что центры описанной и вписанной окружности совпадают.

Радиус описанной окружности:

$\mathbf{R}=\frac{2}{3}\mathbf{h}$, поэтому $\mathbf{R}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, где a- сторона треугольника.

Радиус вписанной окружности:

$\mathbf{r}=\frac{1}{3}\mathbf{h}$,где h- высота треугольника.

Если дана сторона треугольника a, то $\mathbf{h}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

Поэтому$\mathbf{r}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Прямоугольный треугольник.

Радиус описанной окружности:

$\mathbf{R}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$, где c- гипотенуза.

Радиус вписанной окружности:

$\mathbf{r}=\frac{S\Delta}{p}$, где S-площадь треугольник, p-полупериметр.

Произвольный треугольник.

Радиус описанной окружности:

$\mathbf{R}=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S\Delta}$,

$\mathbf{R}=\frac{a}{2\sin\alpha}$, где α- угол, противолежащий стороне a.

Радиус вписанной окружности:

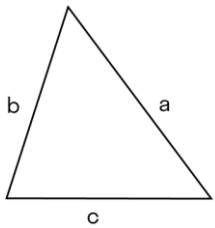
$\mathbf{R}=\frac{S\Delta}{p}$, где p- полупериметр

Периметр треугольника

Периметром принято называть сумму длин всех сторон многоугольника. Периметр обозначается заглавной латинской буквой P. Под P удобно писать маленькими буквами название фигуры, чтобы не запутаться в задачах и ходе решении.
Рассмотрим, какие существуют формулы, и при каких известных исходных данных их можно применять:

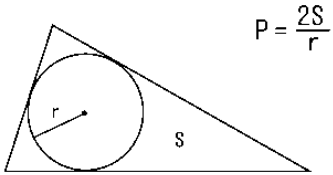
1. <u>Если известны три стороны, то периметр треугольника равен сумме их длин:</u>

P = a + b + c, где a, b, c — длины сторон.



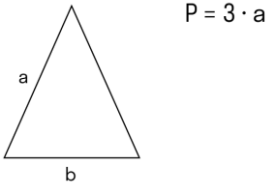
2. <u>Если известна площадь и радиус вписанной окружности:</u>

$\mathbf{P = \frac{2S}{r}}$**,** где S — площадь, r — радиус вписанной окружности.



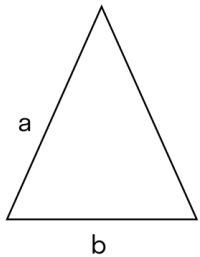
3. <u>Если известна одна сторона в равностороннем треугольнике:</u>

P = 3a , где a — длина стороны.



4. <u>Если известна боковая сторона и основание в равнобедренном треугольнике:</u>

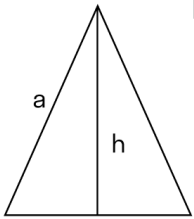
P = 2a + b , где a — боковая сторона, b — основание.



$$P = 2a+b$$

5. <u>Если известна боковая сторона и высота в равнобедренном треугольнике:</u>

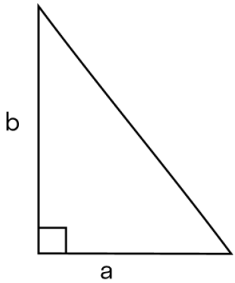
$\mathbf{P = 2\sqrt{a^2 - h^2} + 2a}$, где a — боковая сторона, h — высота, проведенная к основанию.



$$P = 2\sqrt{a^2 - h^2} + 2a$$

6. <u>Если известны катеты в прямоугольном треугольнике</u>:

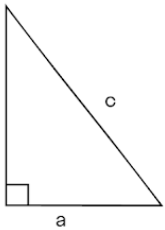
$\boldsymbol{P = \sqrt{a^2 + b^2} + a + b}$, где a, b — катеты.



$$P = \sqrt{a^2 + b^2} + a + b$$

7. <u>Если известны катет и гипотенуза в прямоугольном треугольнике</u>:

$\boldsymbol{P = \sqrt{c^2 - a^2} + a + c}$, где a — любой катет, c — гипотенуза.

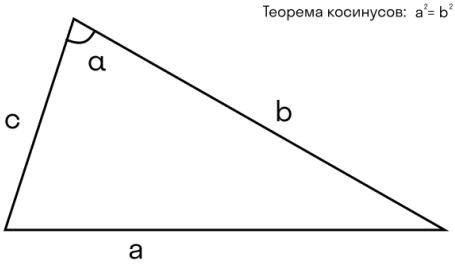


$$P = \sqrt{c^2 + a^2} + a + c$$

8. Если известны две стороны и угол между ними:

$$P = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha} + b + c$$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$



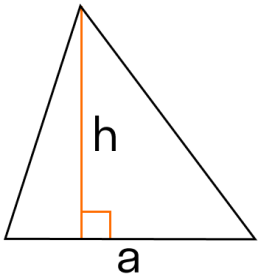
Площадь треугольника

<u>Площадь</u> — это численная характеристика, которая дает нам информацию о размере части плоскости, ограниченной замкнутой геометрической фигурой.

Формулы площади для любого треугольника:

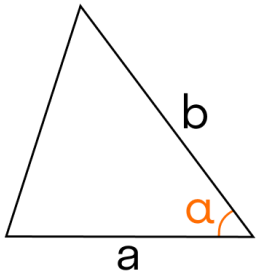
<u>1. Площадь треугольника через основание и высоту</u>

S=0,5·a·h , где a — основание, h — высота.



<u>2. Площадь треугольника через две стороны и угол между ними.</u>

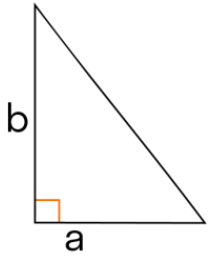
S=0,5·a·b·sinα , где a , b — стороны, α — угол между ними



Для прямоугольного треугольника:

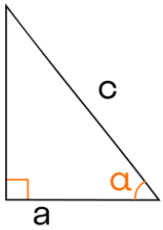
1.Для прямоугольного треугольника чаще всего используют одну формулу — половину произведения катетов. Потому что их всегда можно найти с помощью правил тригонометрии или теоремы Пифагора.

$S=0,5\cdot a\cdot b$, где a , b — стороны.



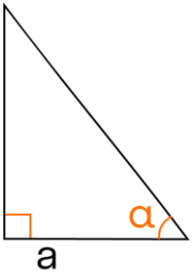
2.Площадь треугольника по гипотенузе и острому углу.

$S=0,25\cdot c^2\cdot \sin(2\alpha)$, где c — гипотенуза, α — любой из прилегающих острых углов.



3.Площадь прямоугольного треугольника по катету и прилежащему углу.

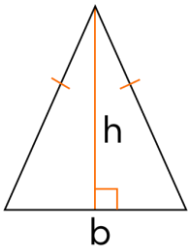
$S=0,5\cdot a^2\cdot tg\alpha$, где a — катет, α — прилежащий угол.



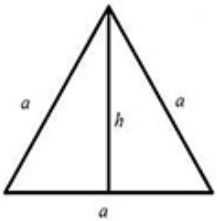
Для равнобедренного треугольника:

1.Вычисление площади через основание и высоту

S=0,5·b·h , где b — основание, h — высота, проведенная к основанию.



Площадь равностороннего треугольника:



$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

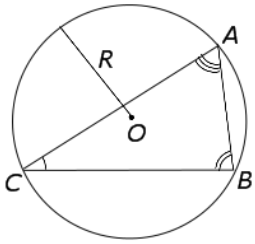
$$S = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$$

Площадь треугольника, вписанного в окружность

Для любого треугольника, вписанного в окружность справедливо равенство:

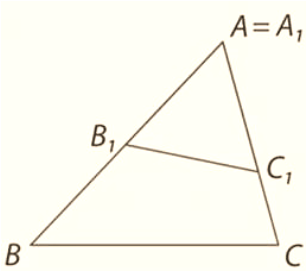
$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

где A , B , C – углы треугольника, S – площадь треугольника, R – радиус описанной окружности.



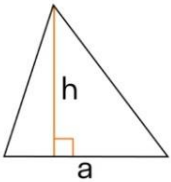
Теорема:

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.

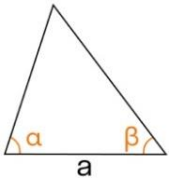


$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1 \cdot A_1C_1}{AB \cdot AC}$$

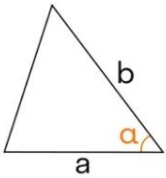
Таблица формул нахождения площади треугольника:



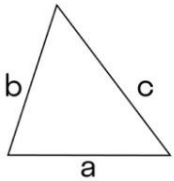
$$S = 0{,}5 \cdot a \cdot h$$



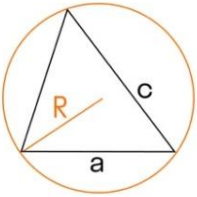
$$S = \frac{a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$$



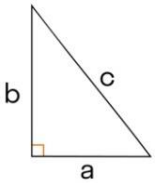
$$S = 0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin\alpha$$



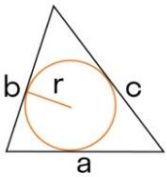
$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$



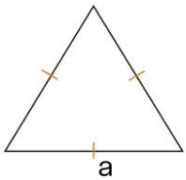
$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$



$$S = 0{,}5 \cdot a \cdot b$$



$$S = r \cdot \frac{a + b + c}{2}$$



$$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов

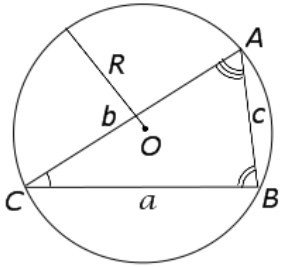
$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC}$$

Теорема синусов используется для вычисления:

- Неизвестных сторон треугольника, если даны два угла и одна сторона.
- Неизвестных углов треугольника, если даны две стороны и один прилежащий угол.

Так как один из углов треугольника может быть тупым, значение синуса тупого угла находится по формуле приведения **sin(180°-α)=sinα**.

Для описанной окружности



Для любого вписанного в окружность треугольника справедливы равенства:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sinA}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sinB}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sinC}} = \mathbf{2R}$$

где a, b, c – стороны треугольника, A, B, C – углы треугольника, R – радиус описанной окружности.

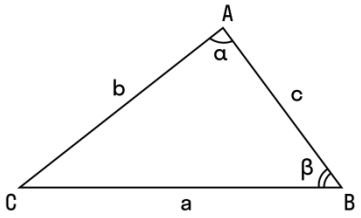
Теорема косинусов

Для вычисления элементов прямоугольного треугольника достаточно двух данных величин. Для вычисления элементов произвольного треугольника необходимо хотя бы 3 данных элемента.

Теорема косинусов:

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$$



Так же теорема исполняется для любой стороны треугольника.

Теорема косинусов используется для вычисления:

- Неизвестной стороны треугольника, если даны две стороны и угол между ними.
- Вычисление косинуса неизвестного угла треугольника, если даны все стороны треугольника.

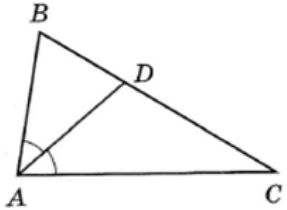
Значение косинуса тупого угла находится по формуле: $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Примеры решения заданий номер 15 из ОГЭ и номера 3 из ЕГЭ

1. В треугольнике два угла равны 48° и 79°. Найдите третий угол. Ответ дайте в градусах.

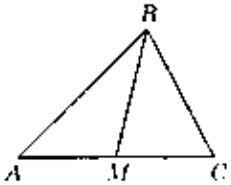
Решение:
Сумма углов треугольника равна 180°, поэтому третий угол равен:
180° – (48° + 79°) = 180° – 127° = 53°.
Ответ: 53°

2. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = 76°$,
AD - биссектриса. Найдите угол BAD.
Ответ дайте в градусах.



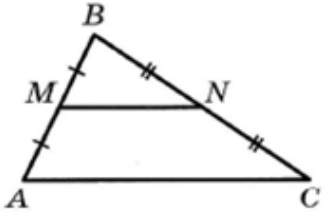
Решение:
$\angle BAD = 76° : 2 = 38°$, так как биссектриса делит угол пополам.
Ответ: $\angle BAD = 38°$.

3. В треугольнике ABC известно, что AC = 54,
BM – медиана, BM = 45. Найдите AM.



Решение:
AM = 54 : 2 = 27, так как медиана делит противоположную сторону пополам.
Ответ: AM = 27.

4. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона B равна 28, сторона BC равна 44, сторона AC равна 42. Найдите MN.



Решение:

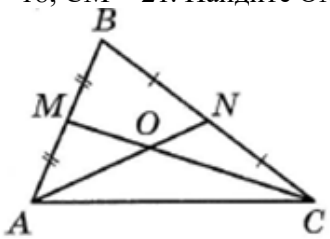
Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине.

$$MN = \frac{1}{2}AC$$

$$MN = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

Ответ: 21.

5. Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC соответственно. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O, AN = 18, CM = 21. Найдите OM.



Решение:

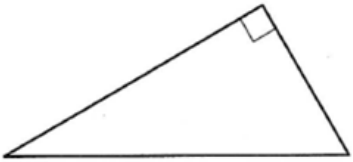
Точки M и N являются серединами сторон AB и BC, значит $AN, CM -$ медианы, поэтому поэтому точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины

$CM = 21$

$OM = 21:3 = 7$

Ответ: 7.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 5. Найти гипотенузу этого треугольника.



Решение:

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 12^2 + 5^2$$

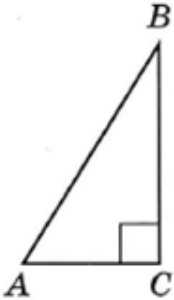
$$c^2 = 144 + 25$$

$$c^2 = 169$$

$$c = 13$$

Ответ: 13.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90°, AC = 14, AB = 20. Найдите $\sin B$.



Решение:

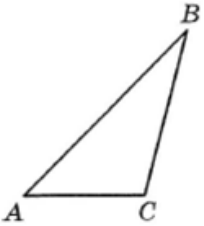
Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение
противолежащего катета к гипотенузе.

$$\sin B = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0,7$$

Ответ: 0,7.

8. В треугольнике ABC угол A равен 45°,

Угол B равен 30°, BC = $8\sqrt{2}$.Найдите AC.



Решение:

По теореме синусов:

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ}=\frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{AC}{\frac{1}{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{AC}{1}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$AC=8$$

Ответ: 6.

9. В треугольнике ABC AB = 15, BC = 8,

$\sin\angle ABC=\frac{5}{6}$.

Найдите площадь треугольника ABC.

Решение:

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 8\cdot\frac{5}{6}=\frac{1\cdot 15\cdot 8\cdot 5}{2\cdot 6}=\frac{120\cdot 5}{12}=50$$

Ответ: 50.

10. Синус острого угла А треугольника АВС равен $\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите косинус угла А.

Решение:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$(\frac{\sqrt{7}}{4})^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{7}{16} + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = 1 - \frac{7}{16}$$

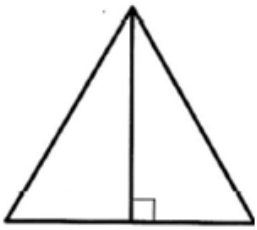
$$\cos^2 A = \frac{16}{16} - \frac{7}{16}$$

$$\cos^2 A = \frac{9}{16}$$

$$\cos A = \frac{3}{4}$$

Ответ: 0,75

11. Биссектриса равностороннего треугольника равна $10\sqrt{3}$. Найдите его сторону.



Решение:

Любая биссектриса равностороннего треугольника является его медианой и высотой.

$$a^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2$$

$$a^2 = (\frac{a}{2})^2 + (10\sqrt{3})^2$$

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = 100 \cdot 3$$

$$\frac{4}{4}a^2 - \frac{a^2}{4} = 300$$

$$\frac{3}{4}a^2 = 300$$

$$\frac{1}{4}a^2 = 100$$

$$a^2 = 400$$

$$a = 20$$

Ответ: 20.

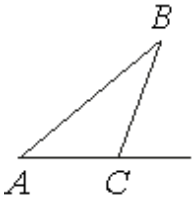
12. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 26°. Найдите его другой острый угол. Ответ дайте в градусах.

Решение:

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
Значит, 90°- 26°= 64° - искомый угол.

Ответ: 64°

13. В треугольнике ABC угол C равен 159°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.

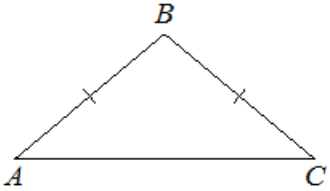


Решение:

Сумма внутреннего и внешнего углов при одной вершине равна 180° (свойство смежных углов), значит, внешний угол равен 180°- 159°=21°

Ответ: 21°

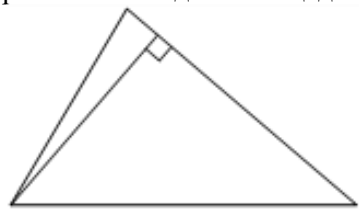
14. В треугольнике ABC известно, что AB=BC, ∠ABC=108°. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.



Решение:
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, сумма углов равна 180°, следовательно, $\angle BCA = (180° - 108°) : 2 = 36°$
Ответ: 36°

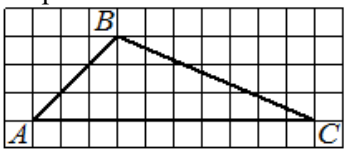
15. Два катета прямоугольного треугольника равны 14 и 5. Найдите площадь этого треугольника.
Решение:
S=$\frac{1}{2}ab$, где a и b – катеты. По условию задачи катеты равны 14 и 5, значит, $S = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 5 = 35$
Ответ: 35.

16. Сторона треугольника равна 24, а высота, проведённая к этой стороне, равна 19. Найдите площадь этого треугольника.



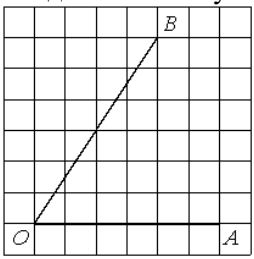
Решение:
$S = \frac{1}{2}ah.$ $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 19 = 228.$
Ответ: 228.

17. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



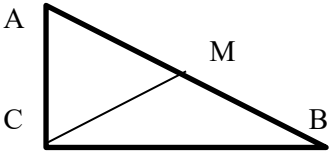
Решение:
Средняя линяя равна половине противолежащей стороны, то есть AC.
AC=10 ,значит ,средняя линяя равна 5.
Ответ : 5.

18. Найдите тангенс угла AOB, изображённого на рисунке.



Решение:
Из точки B проведем перпендикуляр BC к лучу OA, получим прямоугольный треугольник OBC, у которого катет BC=6, катет OC=4, значит tg$\angle BOC = \frac{OB}{OC}, tg\angle BOC = \frac{6}{4} = 1{,}5$
Ответ: 1,5.

19. В треугольнике ABC угол C равен 90°, M – середина стороны AB, AB=20, BC=10. Найдите CM.



Решение:
CM=$\frac{1}{2}$AB (свойство медианы прямоугольного треугольника, проведено к гипотенузе)
CM= 20:2=10
Ответ: 10.

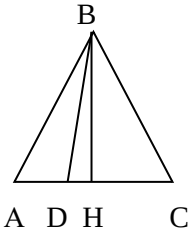
20. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что AD=6, DC=10. Площадь треугольника ABC равна 48. Найдите площадь треугольника BCD.

Решение:

Проведём высоту BH, она общая уΔABC и ΔBCH.

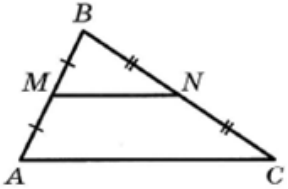
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BH$, BH=48:$(\frac{1}{2}(6+10))=6$.

$S_{BCD}=\frac{1}{2}DC\cdot BH$. $S_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 6=30$.



Ответ: 30

21. В треугольнике ABC известно, что MN — средняя линия. Площадь треугольника BMN равна 76. Найдите площадь треугольника ABC?



Решение:

$\Delta ABC\sim\Delta MBN$, так как$\angle B$ – общий, $\angle BAC=\angle BMN$, как соответственные при MN ∥ AC и секущей AB.

$\frac{AC}{MN}=2$(по свойству средней линии), значит,$\frac{S_{ABC}}{S_{BMN}}=4$.

$S_{ABC}=76\cdot 4$=304.

Ответ: 304.

Задачи для самостоятельного решения

1) В треугольнике два угла равны 70° и 44°. Найдите его третий угол. Ответ дайте в градусах.

2) В треугольнике ABC угол C равен 125°. Найдите внешний угол при вершине C. Ответ дайте в градусах.

3) В треугольнике ABC известно, что∠ BAC = 88°, AD – биссектриса. Найдите угол BAD. Ответ дайте в градусах.

4) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH, ∠BAC = 16°. Найдите угол ABH. Ответ дайте в градусах.

5) В треугольнике ABC известно, что AC = 58, BM – медиана, BM = 37. Найдите AM.

6) Точки M и N являются серединами сторон AB и BC треугольника ABC, сторона AB равна 21, сторона BC равна 22, сторона AC равна 30. Найдите MN.

7) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, AB = 48, AC = 42, MN = 28. Найдите AM.

8) В треугольнике ABC угол A равен 45°, угол B равен 60°, $BC=8\sqrt{6}$. Найдите AC.

9) В треугольнике ABC угол C равен 45°, $AB=8\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

10) У треугольника со сторонами 6 и 30 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведѐнная к первой стороне, равна 15. Чему равна высота, проведѐнная ко второй стороне?

11) В остроугольном треугольнике ABC высота $AH=\sqrt{91}$, а сторона AB равна 10. Найдите cosB.

12) В треугольнике ABC BM – медиана и BH – высота. Известно, что AC = 16, HC = 4 и ∠ACB = 77°. Найдите ∠ AMB. Ответ дайте в градусах.

13) В треугольнике ABC углы A и C равны 10° и 64° соответственно. Найдите угол между высотой BH и биссектрисой BD.

14) Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит еѐ пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 12.

15) Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если BM : MC = 2 : 5, KM = 14.

16) В треугольнике ABC известно, что AB = BC, $\angle ABC = 136°$. Найдите угол BCA. Ответ дайте в градусах.

17) Сторона равностороннего треугольника равна $9\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

18) В треугольнике ABC известно, что AC = 30, BC = 16, угол C равен 90°. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности.

19) Синус острого угла A треугольника ABC равен $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Найдите cos A.

20) Точка H является основанием высоты, проведѐнной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH = 6, AC = 24.

21) Два катета прямоугольного треугольника равны 6 и 7. Найдите площадь этого треугольника.

22) На стороне AC треугольника ABC отмечена точка D так, что AD=4, DC=7. Площадь треугольника ABC равна 55. Найдите площадь треугольника ABD.

23) В треугольнике ABC известно, что DE — средняя линия. Площадь треугольника CDE равна 67. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответы:

1)66. 2)55.3)44. 4)74. 5)29. 6)15. 7)16. 8)24. 9)8. 10)3. 11)0,3.12)103. 13)27. 14)24. 15)49. 16)22. 17)4,5. 18)17. 19)0,25. 20)12. 21)21. 22)20.23) 268.

Справочный материал

φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg}\varphi$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$1^1 = 1$ $1^2 = 1$ $1^3 = 1$ $1^4 = 1$ $1^5 = 1$ $1^6 = 1$ $1^7 = 1$ $1^8 = 1$ $1^9 = 1$ $1^{10} = 1$	$2^1 = 2$ $2^2 = 4$ $2^3 = 8$ $2^4 = 16$ $2^5 = 32$ $2^6 = 64$ $2^7 = 128$ $2^8 = 256$ $2^9 = 512$ $2^{10} = 1024$	$3^1 = 3$ $3^2 = 9$ $3^3 = 27$ $3^4 = 81$ $3^5 = 243$ $3^6 = 729$ $3^7 = 2187$ $3^8 = 6561$ $3^9 = 19683$ $3^{10} = 59049$	$4^1 = 4$ $4^2 = 16$ $4^3 = 64$ $4^4 = 256$ $4^5 = 1024$ $4^6 = 4096$ $4^7 = 16384$ $4^8 = 65536$ $4^9 = 262144$ $4^{10} = 1048576$	$5^1 = 5$ $5^2 = 25$ $5^3 = 125$ $5^4 = 625$ $5^5 = 3125$ $5^6 = 15625$ $5^7 = 78125$ $5^8 = 390625$ $5^9 = 1953125$ $5^{10} = 9765625$
$6^1 = 6$ $6^2 = 36$ $6^3 = 216$ $6^4 = 1296$ $6^5 = 7776$ $6^6 = 46656$ $6^7 = 279936$ $6^8 = 1679616$ $6^9 = 10077696$ $6^{10} = 60466176$	$7^1 = 7$ $7^2 = 49$ $7^3 = 343$ $7^4 = 2401$ $7^5 = 16807$ $7^6 = 117649$ $7^7 = 823543$ $7^8 = 5764801$ $7^9 = 40353607$ $7^{10} = 282475249$	$8^1 = 8$ $8^2 = 64$ $8^3 = 512$ $8^4 = 4096$ $8^5 = 32768$ $8^6 = 262144$ $8^7 = 2097152$ $8^8 = 16777216$ $8^9 = 134217728$ $8^{10} = 107374182$	$9^1 = 9$ $9^2 = 81$ $9^3 = 729$ $9^4 = 6561$ $9^5 = 59049$ $9^6 = 531441$ $9^7 = 4782969$ $9^8 = 43046721$ $9^9 = 387420489$ $9^{10} = 348678440$	$10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1000$ $10^4 = 10000$ $10^5 = 100000$ $10^6 = 1000000$ $10^7 = 10000000$ $10^8 = 100000000$ $10^9 = 1000000000$ $10^{10} = 1000000000$

Единицы / Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801